# Cálculo de Programas

2.° ano da Licenciatura em Engenharia Informática da
Universidade do Minho

2010/11 - Ficha nr.° 7

1. Considere o seguinte par de funções mutuamente recursivas que testam a paridade de um número:

$$\left\{\begin{array}{l} impar\ 0 = \mathsf{False} \\ impar\ (n+1) = par\ n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} par\ 0 = \mathsf{True} \\ par\ (n+1) = impar\ n \end{array}\right.$$

   (a) Mostre que esse par de definições é equivalente ao sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} impar \cdot \mathbf{in} = [\underline{\mathsf{False}}\ , \pi_2] \cdot (id + \langle impar, par \rangle) \\ par \cdot \mathbf{in} = [\underline{\mathsf{True}}\ , \pi_1] \cdot (id + \langle impar, par \rangle) \end{array}\right.$$

   onde $\mathbf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$ e $\mathsf{succ}\ n = n + 1$.

   (b) Mostre, recorrendo às leis da recursividade múltipla e da troca, que $par$ e $impar$ se podem combinar num único ciclo-for com duas variáveis,

$$\begin{array}{l} impar = \pi_1 \cdot imparpar \\ par = \pi_2 \cdot imparpar \\ imparpar = for\ \mathsf{swap}\ (\mathsf{False}, \mathsf{True}) \end{array}$$

   sabendo que, como se viu nas aulas teóricas, catamorfismos de naturais são ciclos-for, isto é,

$$\llparenthesis [\underline{i}\ , b] \rrparenthesis \quad = \quad for\ b\ i \tag{1}$$

2. O diagrama que se segue representa a lei de fusão de catamorfismos sobre $\mathbb{N}_0$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \arrow[d, "\llparenthesis g \rrparenthesis"'] & \mathsf{F}\,\mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\,\llparenthesis g \rrparenthesis"] \\ A \arrow[d, "f"'] & \mathsf{F}\,A \arrow[l, "g"] \arrow[d, "\mathsf{F}\,f"] \\ B & \mathsf{F}\,B \arrow[l, "h"] \end{tikzcd} \qquad f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis = \llparenthesis h \rrparenthesis \ \Leftarrow\ f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}\,f \tag{2}$$

   em que $\mathbf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$ e $\mathsf{F}\,f = id + f$. Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$\begin{array}{cl} & f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis = \llparenthesis h \rrparenthesis \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis) \cdot \mathbf{in} = h \cdot (\mathsf{F}(f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis)) \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & f \cdot (\llparenthesis g \rrparenthesis \cdot \mathbf{in}) = (h \cdot \mathsf{F}f) \cdot \mathsf{F}\llparenthesis g \rrparenthesis \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (f \cdot g) \cdot \mathsf{F}\llparenthesis g \rrparenthesis = (h \cdot \mathsf{F}f) \cdot \mathsf{F}\llparenthesis g \rrparenthesis \\ \Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}f \end{array}$$

3. Introduza variáveis na igualdade de funções

$$(a*) \cdot (b*) \quad = \quad ((a*b)*) \tag{3}$$

mostrando assim que essa igualdade exprime a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{N}_0$. Sabendo que $(a*) = (\!|[\underline{0}\ , (a+)]|\!)$, demonstre a validade de (3) usando a lei de fusão-cata (2) acima deduzida. Assuma as propriedades de $+$ e $*$ (sobre $\mathbb{N}_0$) que conhece.

4. Considere o diagrama que representa a propriedade universal dos catamorfismos de listas, em Haskell,

$$\begin{tikzcd}
[a] \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & 1 + a \times [a] \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \arrow[d, "id + id \times (\!| g |\!)"] \\
b & 1 + a \times b \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd} \qquad f = (\!| g |\!) \ \equiv \ f \cdot \mathbf{in} = g \cdot (id + id \times f) \tag{4}$$

em que $\mathbf{in} = [nil\ , \mathsf{cons}]$, $nil\ \_ = [\,]$ e $\mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$.

(a) Calcule a função out. tal que $\mathsf{out.} \cdot \mathbf{in} = id$.

(b) Mostre que a função

$\mathsf{map} :: (a \to b) \to [\,a\,] \to [\,b\,]$
$\mathsf{map}\ f\ [\,] = [\,]$
$\mathsf{map}\ f\ (h : t) = (f\ h) : \mathsf{map}\ f\ t$

se reduz à equação

$$(\mathsf{map}\ f) \cdot \mathbf{in} \quad = \quad \mathbf{in} \cdot (id + f \times id) \cdot (id + id \times (\mathsf{map}\ f))$$

e que, portanto, $\mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id)|\!)$.

(c) Identifique como catamorfismos de listas as funções seguintes, indicando o gene $g$ para cada caso:

- $f = \mathsf{reverse}$
- $f = foldr\ (*)\ 1$
- $f = look\ k$ para

$look :: \mathsf{Eq}\ a \Rightarrow a \to [\,(a, b)\,] \to \mathsf{Maybe}\ b$
$look\ k\ [\,] = \mathsf{Nothing}$
$look\ k\ ((a, b) : r)$
$\quad \mid a \equiv k = \mathsf{Just}\ b$
$\quad \mid otherwise = look\ k\ r$

- $f$ é a função que implementa o algoritmo de ordenação de listas por inserção ('insertion sort').

5. Considere o par de funções

$f1\ [\,] = [\,]$
$f1\ (h : t) = h : (f2\ t)$

$f2\ [\,] = [\,]$
$f2\ (h : t) = f1\ t$

Use a lei de recursividade múltipla para definir $\langle f1, f2 \rangle$ como um catamorfismo de listas e desenhe o respectivo diagrama.