

Cálculo de Programas

2.º ano da Licenciatura em Engenharia Informática da
Universidade do Minho

2010/11 - Ficha nr.º 6

1. Deduza a lei de reflexão da exponenciação,

$$\overline{\text{ap}} = id$$

onde \overline{f} abrevia $\text{curry } f$ (a) através de um diagrama ; (b) por cálculo analítico.

2. Considere a lei de fusão da exponenciação:

$$\overline{g} \cdot f = \overline{g \cdot (f \times id)} \tag{1}$$

Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$\begin{aligned} & \overline{g} \cdot f = \overline{x} \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \text{ap} \cdot ((\overline{g} \cdot f) \times id) = x \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \text{ap} \cdot ((\overline{g} \times id) \cdot (f \times id)) = x \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & (\text{ap} \cdot (\overline{g} \times id)) \cdot (f \times id) = x \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & g \cdot (f \times id) = x \end{aligned}$$

3. Mostre que a lei (1) é equivalente à igualdade *pointwise*

$$(\text{curry } g) (f \ a) \ b = g(f \ a, \ b)$$

4. Considere a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \text{exp} &:: (a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) \\ \text{exp } f &= f \cdot \text{ap} \end{aligned}$$

- (a) Desenhe o respectivo diagrama.
- (b) Demonstre que $\text{exp } f \cdot \text{exp } g = \text{exp } (f \cdot g)$.
- (c) Demonstre que exp pode também ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{exp} &:: (a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) \\ \text{exp } f \ g &= f \cdot g \end{aligned}$$

5. O combinador

$\text{const} :: a \rightarrow b \rightarrow a$
 $\text{const } a \ b = a$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\text{const } k$ por \underline{k} , qualquer que seja k .

(a) Sabidas que são duas propriedades deste combinador,

$$\underline{k} \cdot g = \underline{k} \tag{2}$$

$$f \cdot (\underline{k}) = \underline{(f \ k)} \tag{3}$$

demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} = \underline{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle} \tag{4}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes acima indicadas.

(b) A função const , cujo tipo também se pode escrever da forma $a \rightarrow a^b$, satisfaz a propriedade (natural) que é expressa pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{const}} & A^B \\ f \downarrow & & \downarrow \text{exp } f \\ C & \xrightarrow{\text{const}} & C^B \end{array}$$

Registe-a, converta-a para notação *pointwise* e exprima por palavras suas o seu significado.