Cálculo de Programas

2.° ano da Licenciatura em Engenharia Informática da Universidade do Minho

2010/11 - Ficha nr.° 4

1. Demonstre a segunda lei de fusão do condicional de McCarthy:

$$(p \rightarrow f, g) \cdot h \quad = \quad (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$$

2. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k \;=\; k \tag{1}$$
$$(p? + p?) \cdot p? \;=\; (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{2}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle \;=\; p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{3}$$
$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle \;=\; p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{4}$$
$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) \;=\; p \rightarrow a, d \tag{5}$$

3. Considere a função $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id \,, i_2 \times id]$.
   (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando o diagrama respectivo.
   (b) Recorra à lei da troca para re-escrever undistl sob a forma de um *split*.
   (c) Demonstre a seguinte propriedade: $\pi_1 \cdot \mathsf{undistl} = \pi_1 + \pi_1$.
   (d) Derive a definição *pointwise* de undistl.

4. Considere a função $\mathsf{iso} = \langle ! + !, [id \,, id] \rangle$.
   (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando o diagrama respectivo.
   (b) Derive (por cálculo analítico) a propriedade (dita *grátis*) de iso,

   $$(id \times f) \cdot \mathsf{iso} \quad = \quad \mathsf{iso} \cdot (f + f)$$

   desenhando previamente o correspondente diagrama.
   (c) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de iso.

5. Considere a função $\mathsf{coassocr} = [id + i_1 \,, i_2 \cdot i_2]$ que é uma das testemunhas do isomorfismo $(A + B) + C \cong A + (B + C)$, da esquerda para a direita. Calcule a sua conversa coassocl a partir da equação

$$\mathsf{coassocl} \cdot \mathsf{coassocr} \quad = \quad id$$

Sugestão: Faça-o resolvendo em ordem a x,y e z a seguinte versão dessa equação:

$$\underbrace{[x \,, [y \,, z]]}_{\mathsf{coassocl}} \cdot \underbrace{[id + i_1 \,, i_2 \cdot i_2]}_{\mathsf{coassocr}} = id$$

6. Demonstre a seguinte igualdade, em que participa um dos lados da função coassocr

$$(h + (g + f)) \cdot i_2 \cdot i_2 \quad = \quad i_2 \cdot i_2 \cdot f$$

e em que f, g e h se assumem devidamente tipadas.

7. Considere a seguinte declaração de um tipo de *árvores binárias*, em Haskell:

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

Indagando os tipos dos construtores Leaf e Fork, por exemplo no GHCi,

```
*LTree> :t Fork
Fork :: (LTree a, LTree a) -> LTree a
*LTree> :t Leaf
Leaf :: a -> LTree a
```

é fácil desenhar o diagrama que explica a construção da função

$$inLTree = [\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]$$

Desenhe-o e calcule a sua inversa

$$\begin{array}{l} outLTree :: \mathsf{LTree}\ a \to \mathsf{Either}\ a\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a) \\ outLTree\ (\mathsf{Leaf}\ a) = i_1\ a \\ outLTree\ (\mathsf{Fork}\ (x, y)) = i_2\ (x, y) \end{array}$$

resolvendo a equação

$$outLTree \cdot inLTree \quad = \quad id$$

em ordem a $outLTree$.

8. Recorde a função $\mathsf{map} :: (a \to b) \to [\,a\,] \to [\,b\,]$. Assumindo como válida a seguinte propriedade dessa função,

$$k = \mathsf{map}\ f \quad \equiv \quad k \cdot [nil\ , \mathsf{cons}] = [nil\ , \mathsf{cons}] \cdot (id + f \times k) \tag{6}$$

para k do mesmo tipo que $\mathsf{map}\ f$ e em que $\mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$ e $nil\ x = [\,]$, demonstre os factos seguintes:

$$\mathsf{map}\ id \quad = \quad id \tag{7}$$

$$\mathsf{map}\ f \cdot nil \quad = \quad nil \tag{8}$$

$$\mathsf{map}\ f\ (a : x) \quad = \quad (f\ a) : (\mathsf{map}\ f\ x) \tag{9}$$