

Cálculo de Funções

FUNÇÕES

Natural-id	$f \cdot id = id \cdot f = f$	(1)
Assoc-comp	$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$	(2)
Leibniz	$f \cdot h = g \cdot h \iff f = g$	(3)
Igualdade extensional	$f = g \iff \langle \forall x :: fx = gx \rangle$	(4)

PRODUTO

Universal-\times	$k = \langle f, g \rangle \iff \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$	(5)
Cancelamento-\times	$\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \quad , \quad \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g$	(6)
Reflexão-\times	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id_{A \times B}$	(7)
Fusão-\times	$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$	(8)
Absorção-\times	$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$	(9)
Def-\times	$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle$	(10)
Natural-π_1	$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1$	(11)
Natural-π_2	$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2$	(12)
Functor-\times	$(g \cdot h) \times (i \cdot j) = (g \times i) \cdot (h \times j)$	(13)
Functor-id-\times	$id_A \times id_B = id_{A \times B}$	(14)
Eq-\times	$\langle f, g \rangle = \langle h, k \rangle \iff f = h \wedge g = k$	(15)

COPRODUTO

Universal-$+$	$k = [f, g] \iff \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$	(16)
Cancelamento-$+$	$[g, h] \cdot i_1 = g \quad , \quad [g, h] \cdot i_2 = h$	(17)
Reflexão-$+$	$[i_1, i_2] = id_{A+B}$	(18)
Fusão-$+$	$f \cdot [g, h] = [f \cdot g, f \cdot h]$	(19)
Absorção-$+$	$[g, h] \cdot (i + j) = [g \cdot i, h \cdot j]$	(20)
Def-$+$	$f + g = [i_1 \cdot f, i_2 \cdot g]$	(21)
Natural-i_1	$(i + j) \cdot i_1 = i_1 \cdot i$	(22)
Natural-i_2	$(i + j) \cdot i_2 = i_2 \cdot j$	(23)
Functor-$+$	$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$	(24)
Functor-id-$+$	$id_A + id_B = id_{A+B}$	(25)
Eq-$+$	$[f, g] = [h, k] \iff f = h \wedge g = k$	(26)
Lei da troca	$[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] = \langle [f, h], [g, k] \rangle$	(27)

EXPONENCIAÇÃO

Universal-exp	$k = \bar{f} \iff f = ap \cdot (k \times id)$	(28)
Cancelamento-exp	$f = ap \cdot (\bar{f} \times id)$	(29)
Reflexão-exp	$\overline{ap} = id_{BA}$	(30)

Fusão-exp	$\overline{g \cdot (f \times id)} = \bar{g} \cdot f$	(31)
Absorção-exp	$f^A \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}$	(32)
Def-exp	$f^A = \overline{f \cdot ap}$	(33)
Functor-exp	$(g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A$	(34)
Functor-id-exp	$id^A = id$	(35)

INDUÇÃO

Universal-cata	$k = \langle \beta \rangle \Leftrightarrow k \cdot in = \beta \cdot (F k)$	(36)
Cancelamento-cata	$\langle \alpha \rangle \cdot in = \alpha \cdot F \langle \alpha \rangle$	(37)
Reflexão-cata	$\langle in \rangle = id_{\top}$	(38)
Fusão-cata	$f \cdot \langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle \Leftarrow f \cdot \alpha = \beta \cdot (F f)$	(39)
Absorção-cata	$\langle \alpha \rangle \cdot \top f = \langle \alpha \cdot B(f, id) \rangle$	(40)
Def-map	$\top f = \langle in_{\mathbb{F}} \cdot B(f, id) \rangle$	(41)

RECURSIVIDADE MÚTUA

Fokkinga	$\begin{cases} f \cdot in = h \cdot F \langle f, g \rangle \\ g \cdot in = k \cdot F \langle f, g \rangle \end{cases} \equiv \langle f, g \rangle = \langle \langle h, k \rangle \rangle$	(42)
“Banana-split”	$\langle \langle i \rangle, \langle j \rangle \rangle = \langle \langle i \times j \rangle \cdot \langle F \pi_1, F \pi_2 \rangle \rangle$	(43)

COINDUÇÃO

Universal-ana	$k = \llbracket \beta \rrbracket \Leftrightarrow out \cdot k = (F k) \cdot \beta$	(44)
Cancelamento-ana	$out \cdot \llbracket \alpha \rrbracket = F \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \alpha$	(45)
Reflexão-ana	$\llbracket out \rrbracket = id_{\top}$	(46)
Fusão-ana	$\llbracket \alpha \rrbracket \cdot f = \llbracket \beta \rrbracket \Leftarrow \alpha \cdot f = (F f) \cdot \beta$	(47)
Absorção-ana	$\top f \cdot \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket B(f, id) \cdot \alpha \rrbracket$	(48)
Def-map	$\top f = \llbracket B(f, id) \cdot out_{\mathbb{F}} \rrbracket$	(49)

FUNCTORES

Functor-F	$F(g \cdot h) = (F g) \cdot (F h)$	(50)
Functor-id-F	$F id_A = id_{(F A)}$	(51)

CONDICIONAL

Fusão de predicado guardado	$p? \cdot f = (f + f) \cdot (p \cdot f)?$	(52)
Def condicional de McCarthy	$p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p?$	(53)
1.^a Lei de fusão do condicional	$f \cdot (p \rightarrow g, h) = p \rightarrow f \cdot g, f \cdot h$	(54)
2.^a Lei de fusão do condicional	$(p \rightarrow f, g) \cdot h = (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$	(55)

Multiplicação	$\mu \cdot \mu = \mu \cdot F \mu$	(56)
Unidade	$\mu \cdot u = \mu \cdot F u = id$	(57)
Natural-u	$u \cdot f = F f \cdot u$	(58)
Natural-μ	$\mu \cdot F F f = F f \cdot \mu$	(59)
Composição monádica	$f \bullet g \stackrel{\text{def}}{=} \mu \cdot F f \cdot g$	(60)
Associatividade-\bullet	$f \bullet (g \bullet h) = (f \bullet g) \bullet h$	(61)
Identidade-\bullet	$u \bullet f = f = f \bullet u$	(62)
Associatividade-\bullet/\cdot	$(f \bullet g) \cdot h = f \bullet (g \cdot h)$	(63)
Associatividade-\cdot/\bullet	$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (F g \cdot h)$	(64)
μ versus \bullet	$id \bullet id = \mu$	(65)
‘μ as binding’	$\mu x \stackrel{\text{def}}{=} x \gg= id$	(66)
‘Binding as μ’	$x \gg= f \stackrel{\text{def}}{=} (\mu \cdot F f)x$	(67)
Sequenciação	$x \gg y \stackrel{\text{def}}{=} x \gg= \underline{y}$	(68)
Notação-do	$do \{x \leftarrow a; b\} \stackrel{\text{def}}{=} a \gg= (\lambda x \rightarrow b)$	(69)

DEFINIÇÕES *pointwise*

Def-comp	$(f \cdot g) x \stackrel{\text{def}}{=} f(g x)$	(70)
Def-const	$\underline{x} y \stackrel{\text{def}}{=} x$	(71)
Def-cond	$(p \rightarrow f, g) x \stackrel{\text{def}}{=} \text{if } p x \text{ then } f x \text{ else } g x$	(72)
Elim-let	$\text{let } x = a \text{ in } b \stackrel{\text{def}}{=} b[x/a]$	(73)
Elim-pair	$t \stackrel{\text{def}}{=} t[(x, y)/z, x/\pi_1 z, y/\pi_2 z]$	(74)
Def-split	$\langle f, g \rangle x \stackrel{\text{def}}{=} (f x, g x)$	(75)