

Cálculo de Programas

2.º ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática (LEI) e Ciências da Computação (LCC)
da Universidade do Minho

2009/10 - Ficha nr.º 12

1. Em contraste com a definição matemática de *mónade*, que oferece um functor F equipado com os operadores *unidade* e *multiplicação*,

$$A \xrightarrow{u} FA \xleftarrow{\mu} F^2 A \quad (1)$$

a class `Monad` em Haskell exhibe a unidade (renomeada para `return`) mas substitui a multiplicação pela operação de “binding”:

```
class Monad m where
  return :: a -> m a
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

- (a) Mostre que, tendo $\gg=$, pode sempre obter μ através de

$$\mu x = x \gg= id \quad (2)$$

qualquer que seja o *mónade* subjacente.

- (b) Mostre ainda que, num *mónade* F ,

$$id \bullet id = \mu \quad (3)$$

se verifica e que $F f$ se pode obter também a partir de $\gg=$:

$$F f x = x \gg= (\text{return} \cdot f) \quad (4)$$

2. O quadro seguinte tabula os *mónades* estudados nesta disciplina,

Mónade	Tipo	μ	u (return)	$x \gg= f$
Apontadores	$1 + A$	$[i_1, id]$	i_2	
Mensagens de erro	<code>Error A</code>	(ver Ficha 11)	<code>Ok</code>	
Listas	A^*	<code>concat</code>	<code>singl</code>	
Árvores	<code>LTree A</code>	<code>join</code> (ver Ficha 10)	<code>Leaf</code>	
Acções sobre um estado	$(A \times S)^S$	<code>exp ap</code>	\overline{id}	$\widehat{f} \cdot x$

onde (recordar Ficha 5) $\text{exp } f$ designa o mesmo que $\overline{(f \cdot \text{ap})}$, isto é, $\text{exp } f g = f \cdot g$. Calcule as definições da operação de *binding* que faltam na tabela.

3. Mostre que, no *mónade* de acções sobre um estado, se tem

$$x \gg= y = y \cdot \pi_2 \cdot x \quad (5)$$

(faça também um diagrama explicativo dos tipos em jogo) sabendo da seguinte propriedade

$$\underline{f} = \overline{(f \cdot \pi_2)} \quad (6)$$

que relaciona funções constantes de ordem superior com a exponenciação.

4. Considere as seguintes acções que habitam o mónade de estado $\text{St } A = (A \times S)^S$, para um dado espaço de estados S :

$$\text{modify } g = \langle !, g \rangle \quad (7)$$

$$\text{query } f = \langle f, \text{id} \rangle \quad (8)$$

A acção *query* f interroga o estado aplicando-lhe a observação f e deixando-o inalterado; já a acção *modify* g recorre a g para actualizar o valor corrente do estado, dando como resultado um mero “acknowledgement” da acção realizada.

Mostre que as igualdades

$$\text{do } \{ \text{modify } \text{id}; \text{query } g \} = \text{query } g \quad (9)$$

$$\text{do } \{ \text{modify } f; \text{modify } g \} = \text{modify } (g \cdot f) \quad (10)$$

se verificam.

5. Aplique as regras para “monadificação” de programas Haskell (escritos ao nível *pointwise*) apresentadas nas aulas teóricas aos combinadores

$$\begin{aligned} \text{foldr } f \ b \ [] &= b \\ \text{foldr } f \ b \ (a : x) &= f \ a \ (\text{foldr } f \ b \ x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{map } f \ [] &= [] \\ \text{map } f \ (a : x) &= (f \ a) : \text{map } f \ x \end{aligned}$$

por forma a obter as correspondentes versões monádicas, com tipos

$$\text{mmap} :: (\text{Monad } m) \Rightarrow (a \rightarrow m \ b) \rightarrow [a] \rightarrow m \ [b]$$

e

$$\text{mfoldr} :: (\text{Monad } m) \Rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow m \ b) \rightarrow m \ b \rightarrow [a] \rightarrow m \ b$$

respectivamente.

6. Considere o hilomorfismo “quick fold” que se segue:

$$\begin{aligned} \text{qFold} &:: (\text{Ord } a) \Rightarrow (a \rightarrow a \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow a \\ \text{qFold } f \ b &= \llbracket [b], g, \text{qsep} \rrbracket \\ &\textbf{where } g \ (a, (x, y)) = a \text{'f' } (x \text{'f' } y) \end{aligned}$$

- Escreva a função auxiliar g em notação *pointfree*.
- Qual o tipo da árvore intermédia do hilomorfismo dado? Faça um diagrama explicativo em que se explicitem todos os tipos envolvidos e, em particular, o da função *qsep*.
- A definição de *qFold* mostra como combinar “material genético” de diferentes hilomorfismos para produzir novos hilomorfismos. Qual é a função que conhece onde *qsep* é usada como gene da correspondente parte “ana”?