Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática (LEI) e Ciências da Computação (LCC)
da Universidade do Minho

2009/10 - Ficha nr.° 9

1. A função

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{map}\ f\ [\,] = [\,] \\
\mathsf{map}\ f\ (h : t) = (f\ h) : \mathsf{map}\ f\ t
\end{array}
$$

é o catamorfsmo $\mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id) |\!)$, como sabe.

(a) Mostre, usando as leis de reflexão e fusão-cata (entre outras), que as seguintes propriedades se verificam:

$$
\mathsf{map}\ id = id \tag{1}
$$

$$
(\mathsf{map}\ f) \cdot (\mathsf{map}\ g) = \mathsf{map}\ (f \cdot g) \tag{2}
$$

(b) Se inspeccionar bem o diagrama que se segue

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & {[A]} \arrow[d, "\mathsf{map}\ f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}"] & 1 + B \times [A] \arrow[d, "id+id\times(\mathsf{map}\ f)"] & 1 + A \times [A] \arrow[l, "id+f\times id"] \arrow[ll, bend right, "\mathbf{in}"'] \arrow[d, "id+id\times(\mathsf{map}\ f)"] \\
B & {[B]} & 1 + B \times [B] \arrow[l, "\mathbf{in}"] & 1 + A \times [B] \arrow[l, "id+f\times id"]
\end{tikzcd}
$$

verifica que $\mathsf{map}\ f$ pode também ser escrita sob a forma de um anamorfismo, $\mathsf{map}\ f = [\![(id + id \times f) \cdot \mathsf{out}]\!]$.

Complete a prova que se segue dessa equivalência:

$$
\begin{array}{cl}
 & \mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id) |\!)) \\
\equiv & \qquad \{\ \text{universal-cata}\ \} \\
 & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\equiv & \qquad \{\ \text{... alguns passos depois...}\ \} \\
 & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\equiv & \qquad \{\ \text{universal-ana}\ \} \\
 & \mathsf{map}\ f = [\![(id + f \times id) \cdot \mathsf{out}]\!]
\end{array}
$$

(c) Partindo de $\mathsf{map}\ f = [\![(id + f \times id) \cdot \mathsf{out}]\!]$ demonstre que $\mathsf{map}\ f \cdot [\![g]\!] = [\![(id + f \times id) \cdot g]\!]$.

2. Investigue o comportamento do anamorfismo $\mathsf{repeat} = [\!(i_2 \cdot \langle id, id \rangle)\!]$ cujo diagrama é:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{N}_0]} & & 1 + \mathbb{N}_0 \times [\mathbb{N}_0] \arrow[ll, "\mathbf{in}"'] \\
\mathbb{N}_0 \arrow[u, "\mathsf{repeat}"] \arrow[rr, "i_2 \cdot \langle id, id \rangle"'] & & 1 + \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[u, "id + id \times \mathsf{repeat}"']
\end{tikzcd}$$

Em particular:

(a) Derive a definição *pointwise* de repeat.

(b) Mostre que $\mathsf{map}\ f \cdot \mathsf{repeat} = \mathsf{repeat} \cdot f$.