Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática (LEI) e Ciências da Computação (LCC)
da Universidade do Minho

2009/10 - Ficha nr.° 6

1. Considere a lei de fusão de catamorfismos sobre $\mathbb{N}_0$,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "\llparenthesis g \rrparenthesis"'] & \mathsf{F}\,\mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\llparenthesis g \rrparenthesis"] \\
A \arrow[d, "f"'] & \mathsf{F}\,A \arrow[l, "g"] \arrow[d, "\mathsf{F}\,f"] \\
B & \mathsf{F}\,B \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}
\qquad
f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis = \llparenthesis h \rrparenthesis \;\Leftarrow\; f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}\,f \tag{1}
$$

em que $\mathbf{in} = [\underline{0}\,, \mathsf{succ}]$ e $\mathsf{F}\,f = id + f$. Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$
\begin{array}{cl}
& f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis = \llparenthesis h \rrparenthesis \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis) \cdot \mathbf{in} = h \cdot (\mathsf{F}(f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis)) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f \cdot (\llparenthesis g \rrparenthesis \cdot \mathbf{in}) = (h \cdot \mathsf{F}f) \cdot \mathsf{F}\llparenthesis g \rrparenthesis \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (f \cdot g) \cdot \mathsf{F}\llparenthesis g \rrparenthesis = (h \cdot \mathsf{F}f) \cdot \mathsf{F}\llparenthesis g \rrparenthesis \\
\Leftarrow & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}f
\end{array}
$$

2. Introduza variáveis na igualdade de funções

$$
(a*) \cdot (b*) \quad = \quad ((a * b)*) \tag{2}
$$

mostrando assim que essa igualdade expressa a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{N}_0$. Sabendo que $(a*) = \llparenthesis [\underline{0}\,, (a+)] \rrparenthesis$, demonstre a validade de (2) usando a lei de fusão-cata (1) acima deduzida. Assuma as propriedades de $+$ e $*$ (sobre $\mathbb{N}_0$) que conhece.

3. Mostre que catamorfismos de naturais descrevem ciclos-for, isto é, prove que a igualdade

$$
\llparenthesis [\underline{i}\,, b] \rrparenthesis \quad = \quad for\; b\; i \tag{3}
$$

se verifica.

4. Pretende-se mostrar que toda a função linear em $\mathbb{N}_0$, da forma $y = ax + b$, é um catamorfismo de naturais, para a,b não negativos. Seja então dada a função $f\ a\ b\ x = a * x + b$. Mostre que, para todo o a e b (não negativos), $f\ a\ b = \llparenthesis g \rrparenthesis$, identificando o gene g e desenhando o diagrama do catamorfismo que obteve.

5. A lei de recursividade mútua generaliza a mais do que duas funções mutuamente recursivas, por exemplo a três:

$$\left\{\begin{array}{l} f \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ g \cdot in = k \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ j \cdot in = l \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \end{array}\right. \equiv \langle f, \langle g, j\rangle\rangle = (\!|\langle h, \langle k, l\rangle\rangle|\!) \tag{4}$$

Justifique detalhadamente os passos do seguinte cálculo dessa versão da lei:

$$\begin{array}{cl} & \langle f, \langle g, j\rangle\rangle = (\!|\langle h, \langle k, l\rangle\rangle|\!) \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \langle f, \langle g, j\rangle\rangle \cdot in = \langle h, \langle k, l\rangle\rangle \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \langle f \cdot in, \langle g, j\rangle \cdot in\rangle = \langle h \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle, \langle k, l\rangle \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle\rangle \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \left\{\begin{array}{l} f \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ \langle g, j\rangle \cdot in = \langle k, l\rangle \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \end{array}\right. \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \left\{\begin{array}{l} f \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ g \cdot in = k \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ j \cdot in = l \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \end{array}\right. \end{array}$$

6. O combinador

$$\begin{array}{l} \mathsf{const} :: a \to b \to a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a \end{array}$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Sabidas que são duas proprieades deste combinador,

$$\underline{k} \cdot g = \underline{k} \tag{5}$$

$$f \cdot (\underline{k}) = \underline{(f\ k)} \tag{6}$$

demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{7}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes acima indicadas.