Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática (LEI) e Ciências da Computação (LCC)
da Universidade do Minho

2009/10 - Ficha nr.° 5

1. Considere a lei de fusão da exponenciação:

$$\overline{g} \cdot f \quad = \quad \overline{g \cdot (f \times id)} \tag{1}$$

   Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$\begin{array}{ll} & \overline{g} \cdot f = \overline{x} \\ \equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{ap} \cdot ((\overline{g} \cdot f) \times id) = x \\ \equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{ap} \cdot ((\overline{g} \times id) \cdot (f \times id)) = x \\ \equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (\mathsf{ap} \cdot (\overline{g} \times id)) \cdot (f \times id) = x \\ \equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & g \cdot (f \times id) = x \end{array}$$

2. Mostre que a lei (1) é equivalente à igualdade *pointwise*

```
(curry g) (f a) b = g(f a, b)
```

3. Considere a seguinte definição:

$$\begin{array}{l} \mathsf{exp} :: (a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) \\ \mathsf{exp}\ f = \overline{f \cdot \mathsf{ap}} \end{array}$$

   (a) Desenhe o respectivo diagrama.
   (b) Demonstre que $\mathsf{exp}\ f \cdot \mathsf{exp}\ g = \mathsf{exp}\ (f \cdot g)$.
   (c) Demonstre que exp pode também ser definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} \mathsf{exp} :: (a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) \\ \mathsf{exp}\ f\ g = f \cdot g \end{array}$$

4. Considere a função que gera funções constantes em Haskell:

$$\begin{array}{l} \mathsf{const} :: a \to b \to a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a \end{array}$$

(É imediato ver que $\mathsf{const}\ k$ designa o mesmo que $\underline{k}$.)

A função const, cujo tipo também se pode escrever da forma $a \to a^b$, satisfaz a propriedade (natural) que é expressa pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathsf{const}"] \arrow[d, "f"'] & A^B \arrow[d, "\mathsf{exp}\ f"] \\ C \arrow[r, "\mathsf{const}"'] & C^B \end{tikzcd}$$

Registe-a, converta-a para notação *pointwise* e exprima por palavras suas o seu significado.

5. Considere o seguinte sistema de equações

$$\begin{array}{l} \mathit{fib} = \pi_2 \cdot \mathit{fib}' \\ \mathit{fib}' \cdot [\underline{0}\ , \mathsf{succ}] = [\langle \underline{1}, \underline{1} \rangle\ , \langle \mathsf{add}, \pi_2 \rangle] \cdot (id + \mathit{fib}') \end{array}$$

em que se define a função de Fibonacci fib com recurso a uma função auxiliar (fib'), em que $\mathsf{succ} = (1+)$ e $\mathsf{add} = \widehat{(+)}$, isto é, $\mathsf{add}\ (n, m) = n + m$. Converta este sistema de equações num programa Haskell com variáveis.

6. Recorde a função $\mathsf{map} :: (a \to b) \to [\,a\,] \to [\,b\,]$. Assumindo a seguinte propriedade de map,

$$k = \mathsf{map}\ f \quad \equiv \quad k \cdot [\mathit{nil}\ , \mathsf{cons}] = [\mathit{nil}\ , \mathsf{cons}] \cdot (id + f \times k) \tag{2}$$

válida para qualquer k do mesmo tipo, em que $\mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$ e $\mathit{nil}\ x = [\,]$. demonstre os factos seguintes:

$$\mathsf{map}\ id = id \tag{3}$$

$$\mathsf{map}\ f \cdot \mathit{nil} = \mathit{nil} \tag{4}$$

$$\mathsf{map}\ f\ (a : x) = (f\ a) : (\mathsf{map}\ f\ x) \tag{5}$$