Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação da
Universidade do Minho

2009/10 - Ficha nr.° 3

1. A *lei da troca* foi justificada nas aulas teóricas usando diagramas. Analiticamente, a mesma lei demonstra-se facilmente resolvendo em ordem a x a equação

$$[\langle f, g\rangle \ , \langle h, k\rangle] \quad = \quad x \tag{1}$$

Apresente justificações para cada um dos passos do respectivo cálculo:

$$
\begin{array}{ll}
 & x = [\langle f, g\rangle \ , \langle h, k\rangle] \\
\equiv & \qquad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot (x \cdot i_1) = f \\ \pi_2 \cdot (x \cdot i_1) = g \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot (x \cdot i_2) = h \\ \pi_2 \cdot (x \cdot i_2) = k \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\pi_1 \cdot x) \cdot i_1 = f \\ (\pi_1 \cdot x) \cdot i_2 = h \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} (\pi_2 \cdot x) \cdot i_1 = g \\ (\pi_2 \cdot x) \cdot i_2 = k \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot x = [f \ , h] \\ \pi_2 \cdot x = [g \ , k] \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \} \\
 & x = \langle [f \ , h], [g \ , k] \rangle
\end{array}
$$

2. Nas aulas teóricas construiu-se a definição da função coassocr $= [id + i_1 \ , i_2 \cdot i_2]$ como uma das testemunhas do isomorfismo $(A{+}B){+}C \cong A{+}(B{+}C)$, da esquerda para a direita. Isso fez-se com base no respectivo diagrama. Podemos fazer o mesmo para a sua conversa coassocl, ou calculá-la a partir da equação

$$\mathsf{coassocl} \cdot \mathsf{coassocr} \quad = \quad id$$

Faça-o então resolvendo em ordem a x,y e z a seguinte versão dessa equação:

$$\underbrace{[x \ , [y \ , z]]}_{\mathsf{coassocl}} \cdot \underbrace{[id + i_1 \ , i_2 \cdot i_2]}_{\mathsf{coassocr}} = id \tag{2}$$

3. Demonstre a seguinte igualdade, em que participa um dos lados da função coassocr

$$h + (g + f) \cdot i_2 \cdot i_2 \quad = \quad i_2 \cdot i_2 \cdot f \tag{3}$$

   e em que f, g e h se assumem devidamente tipadas.

4. Considere a seguinte função: $\mathsf{iso} = [i_1 \times id \,, i_2 \times id]$.

   (a) Identifique o isomorfismo que testemunha, desenhando o diagrama respectivo.

   (b) Derive uma definição *pointwise* da mesma.

   (c) Demonstre a seguinte propriedade: $\pi_1 \cdot \mathsf{iso} = \pi_1 + \pi_1$.

5. Considere a seguinte declaração de um tipo de *árvores binárias*, em Haskell,

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

   que induz a definição do isomorfismo

$$\mathit{inLTree} = [\mathsf{Leaf} \,, \mathsf{Fork}] \tag{4}$$

   Indagando os tipos dos construtores Leaf e Fork, por exemplo no GHCi,

```
*LTree> :t Fork
Fork :: (LTree a, LTree a) -> LTree a
*LTree> :t Leaf
Leaf :: a -> LTree a
```

   é fácil desenhar o diagrama que explica a construção de $\mathit{inLTree}$. Desenhe-o e calcule a sua inversa

$$\mathit{outLTree} :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow \mathsf{Either}\ a\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$
$$\mathit{outLTree}\ (\mathsf{Leaf}\ a) = i_1\ a$$
$$\mathit{outLTree}\ (\mathsf{Fork}\ (x, y)) = i_2\ (x, y)$$

   resolvendo a equação

$$\mathit{outLTree} \cdot \mathit{inLTree} \quad = \quad id \tag{5}$$

   em ordem a $\mathit{outLTree}$.

6. Recordando o combinador

$$\mathit{for}\ b\ i\ 0 = i$$
$$\mathit{for}\ b\ i\ (n + 1) = b\ (\mathit{for}\ b\ i\ n)$$

   mostre que $\mathit{for}\ b\ i$ é solução da equação seguinte, em f:

$$f \cdot [\underline{0} \,, \mathit{succ}] = [\underline{i} \,, b] \cdot (id + f) \tag{6}$$