Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC e da LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2009/10

Exame de recurso — 12 de Julho 2010
14h00
Salas 2201, 2202, 2203 e 2204

Esta prova consta de ***10*** *questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

PROVA SEM CONSULTA (2h30m)

GRUPO I

Questão 1 Recorde a função $\mathsf{coassocr} = [id{+}i_1\ ,\ i_2{\cdot}i_2]$ que é testemunha do isomorfismo $(A{+}B){+}C \cong A{+}(B{+}C)$, da esquerda para a direita. Calcule a sua conversa $\mathsf{coassocl}$ resolvendo em ordem a x,y e z a equação

$$\underbrace{[x\ ,[y\ ,z]]}_{\mathsf{coassocl}} \cdot \mathsf{coassocr} = id \qquad (1)$$

Questão 2 A lei universal

$$\begin{tikzcd} T & \mathsf{F}\,T \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{F}(\!|g|\!)"] \\ B \arrow[from=u, "k=(\!|g|\!)"'] & \mathsf{F}\,B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad k = (\!|g|\!) \ \equiv\ k \cdot \mathbf{in} = g \cdot \mathsf{F}\ k$$

dá-nos meios para raciocinarmos sobre uma função k sempre que esta se pode escrever como um catamorfismo de gene g sobre o tipo indutivo T.

Preencha as entradas vazias dos catamorfismos que constam do quadro seguinte,

k	g	$\mathsf{F}\,X$	$\mathsf{F}\,f$	T	$\mathbf{in}$	B
filter p		$1 + A \times X$				$[A]$
fmap h			$id + f \times f$		$[\mathit{Leaf}\ ,\mathit{Fork}]$	

em que a coluna da esquerda identifica funções que conhece sobre o tipo da coluna T, que facilmente identifica.

Questão 3 Deduza a propriedade

$$\pi_1 \cdot \mathsf{unzip} = \mathsf{map}\ \pi_1 \qquad (2)$$

a partir das seguintes definições das funções

$\mathsf{map} :: (a \to b) \to [\,a\,] \to [\,b\,]$
$\mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id)|\!)$

e

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{unzip} :: [(a,b)] \to ([a],[b]) \\
\mathsf{unzip} = (\![\mathit{nil2}\ , \mathit{cons2} \cdot \langle \mathit{fst2}, \mathit{snd2} \rangle]\!) \\
\qquad \textbf{where } \mathit{nil2} = \langle \mathit{nil}, \mathit{nil} \rangle \\
\qquad\quad \mathit{cons2} = \mathit{cons} \times \mathit{cons} \\
\qquad\quad \mathit{fst2} = \pi_1 \times \pi_1 \\
\qquad\quad \mathit{snd2} = \pi_2 \times \pi_2 \\
\qquad\quad \mathit{nil} = \underline{[\,]} \\
\qquad\quad \mathit{cons}\ (a,b) = a : b
\end{array}
$$

Justifique todos os passos do cálculo que efectuar.

Questão 4 Considere o par de funções

$$
\begin{array}{l}
\mathit{f1}\ [\,] = [\,] \\
\mathit{f1}\ (h:t) = h : (\mathit{f2}\ t) \\
\mathit{f2}\ [\,] = [\,] \\
\mathit{f2}\ (h:t) = \mathit{f1}\ t
\end{array}
$$

Use a lei de recursividade múltipla para definir $\langle \mathit{f1}, \mathit{f2} \rangle$ como um catamorfismo e desenhe o respectivo diagrama.

Questão 5 Deduza a propriedade natural

$$
\mathsf{map}\ (g+f) \cdot \mathit{delta} \quad = \quad \mathit{delta} \cdot (g + \mathsf{map}\ f) \tag{3}
$$

da função

$$
\begin{array}{l}
\mathit{delta} :: b + [a] \to [b+a] \\
\mathit{delta} = [\mathsf{singl} \cdot i_1\ , \mathsf{map}\ i_2]
\end{array}
$$

em que a função singl, que conhece, tem tipo $a \to [a]$.

Questão 6 Seja dada a função

$$
\begin{array}{l}
\mathit{takewhile} :: (a \to \mathit{Bool}) \to [a] \to [a] \\
\mathit{takewhile}\ p\ [\,] = [\,] \\
\mathit{takewhile}\ p\ (h:t) \\
\quad \mid p\ h = h : \mathit{takewhile}\ p\ t \\
\quad \mid \mathit{otherwise} = [\,]
\end{array}
$$

Sabendo-se que $\mathit{takewhile}\ p = (\![\mathit{nil}\ , (p \cdot \pi_1) \to \widehat{(:)}, \mathit{nil}]\!)$, onde $\mathit{nil}\ \_ = [\,]$, e que true é o predicado $\mathit{true}\ x = \mathit{True}$, isto é, tal que $\mathit{true}? = i_1$, mostre que $\mathit{takewhile}\ \mathit{true} = \mathit{id}$.

GRUPO II

Questão 7 Demonstre a propriedade

$$
\overline{f \cdot g} \quad = \quad \overline{f \cdot ap} \cdot \overline{g} \tag{4}
$$

Questão 8 Mostre que o anamorfismo g definido pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{N}_0]} & 1 + \mathbb{N}_0 \times [\mathbb{N}_0] \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \\
\mathbb{N}_0 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i_2 \cdot \langle id, id \rangle"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[u, "id + id \times g"']
\end{tikzcd}$$

é tal que a propriedade

$$\mathsf{map}\ f \cdot g = g \cdot f \tag{5}$$

se verifica.

Questão 9 Use as regras para a monadificação de funções que conhece para completar a seguinte versão monádica da função $takewhile$ da questão 6:

$takewhilem :: (Monad\ m) \Rightarrow (a \rightarrow m\ Bool) \rightarrow [a] \rightarrow m\ [a]$
$takewhilem\ p\ [\,] = \mathsf{return}\ [\,]$
$takewhilem\ p\ (h : t) =$ ....

Questão 10 Mostra-se que qualquer tipo indutivo $\mathsf{T}\ a \cong \mathsf{B}(a, \mathsf{T} a)$ cuja base é $\mathsf{B}(f, g) = f + \mathsf{F}\ g$, onde F é um functor arbitrário, forma um mónade, para $\mu = (\![[id\ ,\ \mathbf{in} \cdot i_2]]\!)$ e $u = \mathbf{in} \cdot i_1$. Mostre que o tipo

$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$

está nessas condições e use este resultado para derivar a versão *pointwise* de μ, para este mónade em particular.
