Cálculo de Programas

Licenciatura em Engenharia Informática

Ficha 4

$$\begin{tikzcd} a \times b \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\overline{f} \times \mathsf{id}"'] & c \\ c^b \times b \arrow[ur, "\mathsf{ap}"'] & \end{tikzcd}$$

$h = \overline{f} \Leftrightarrow \mathsf{ap} \circ (h \times \mathsf{id}) = f$	Univ-exp
$\mathsf{ap} \circ (\overline{f} \times \mathsf{id}) = f$	Cancel-exp
$\overline{\mathsf{ap}} = \mathsf{id}$	Reflex-exp
$\overline{f} \circ g = \overline{f \circ (g \times \mathsf{id})}$	Fusion-exp
$f \circ \mathsf{ap} = \mathsf{ap} \circ (\overline{f \circ \mathsf{ap}} \times \mathsf{id})$	Nat-ap
$\overline{f}\ x\ y = f\ (x, y)$	Def-curry
$\mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x$	Def-ap

---

1. Considere a função $\overline{\mathsf{snd}}$.
   (a) Identifique o tipo desta função, desenhando o respectivo diagrama.
   (b) Demonstre que $\overline{\mathsf{snd}}\ x = \mathsf{id}$.
   (c) Demonstre que $(+) \circ \underline{0} = \overline{\mathsf{snd}}$ corresponde à seguinte propriedade da adição: $0 + x = x$.
   (d) Como se poderá exprimir no estilo *point-free* a propriedade $x + 0 = x$?

2. Considere o isomorfismo $2 \to a \cong a \times a$.
   (a) Defina no estilo *point-free* a função $\mathsf{iso} :: (2 \to a) \to a \times a$.
   (b) Demonstre que a definição que obteve é equivalente à seguinte definição Haskell:

   $\mathsf{iso} :: (a \to \mathsf{Either}\ ()\ ()) \to (a, a)$
   $\mathsf{iso}\ f = (f\ (\mathsf{Left}\ ()), f\ (\mathsf{Right}\ ()))$

   (c) Usando a função $\mathsf{distr} :: a \times (b + c) \to (a \times b + a \times c)$, defina no estilo *point-free* a função $\mathsf{iso}^{-1} :: a \times a \to (2 \to a)$.

3. Considere a seguinte definição:

   $\mathsf{exp} :: (a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b))$
   $\mathsf{exp}\ f = \overline{f \circ \mathsf{ap}}$

   (a) Desenhe o respectivo diagrama.
   (b) Demonstre que $\mathsf{exp}\ f \circ \mathsf{exp}\ g = \mathsf{exp}\ (f \circ g)$.
   (c) Demonstre que exp pode também ser definida da seguinte forma:

   $\mathsf{exp} :: (a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b))$
   $\mathsf{exp}\ f\ g = f \circ g$

4. Demonstre o isomorfismo $a \to 1 \cong 1$.

5. Considere o isomorfismo $2 \times a \cong a + a$. É possível definir em *point-free* a seguinte função que testemunha este isomorfismo:

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{iso} :: 2 \times a \to a + a \\
\mathsf{iso} = (\mathsf{snd} + \mathsf{snd}) \circ \mathsf{distl} \\
\quad \textbf{where}\ \mathsf{distl} :: (a + b) \times c \to (a \times c + b \times c) \\
\qquad\qquad \mathsf{distl} = \mathsf{ap} \circ ((\overline{\mathsf{inl}} \triangledown \overline{\mathsf{inr}}) \times \mathsf{id})
\end{array}
$$

   (a) Defina a função iso no estilo *point-free* sem usar a função distl.

   (b) Demonstre que a definição que obteve é equivalente à apresentada acima.

6. Considere o isomorfirmo $(a \to b) \times (a \to c) \cong a \to (b \times c)$.

   (a) Defina no estilo *point-free* a função $\mathsf{split} :: (a \to b) \times (a \to c) \to (a \to (b \times c))$.

   (b) Demonstre que $\overline{\mathsf{split}} = (\triangle)$, ou seja $\mathsf{split}\ (f, g)\ x = (f\ x, g\ x)$.