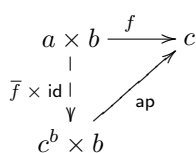


Cálculo de Programas

Licenciatura em Engenharia Informática

Ficha 4



$h = \bar{f} \Leftrightarrow \text{ap} \circ (h \times \text{id}) = f$	UNIV-exp
$\text{ap} \circ (\bar{f} \times \text{id}) = f$	CANCEL-exp
$\overline{\text{ap}} = \text{id}$	REFLEX-exp
$\bar{f} \circ g = \overline{f \circ (g \times \text{id})}$	FUSION-exp
$f \circ \text{ap} = \text{ap} \circ (\overline{f \circ \text{ap}} \times \text{id})$	NAT-ap
$\bar{f} x y = f(x, y)$	DEF-curry
$\text{ap}(f, x) = f x$	DEF-ap

1. Considere a função $\overline{\text{snd}}$.
 - (a) Identifique o tipo desta função, desenhando o respectivo diagrama.
 - (b) Demonstre que $\overline{\text{snd}} x = \text{id}$.
 - (c) Demonstre que $(+) \circ \underline{0} = \overline{\text{snd}}$ corresponde à seguinte propriedade da adição: $0 + x = x$.
 - (d) Como se poderá exprimir no estilo *point-free* a propriedade $x + 0 = x$?
2. Considere o isomorfismo $2 \rightarrow a \cong a \times a$.

- (a) Defina no estilo *point-free* a função $\text{iso} :: (2 \rightarrow a) \rightarrow a \times a$.
- (b) Demonstre que a definição que obteve é equivalente à seguinte definição Haskell:

$$\begin{aligned} \text{iso} &:: (a \rightarrow \text{Either } () ()) \rightarrow (a, a) \\ \text{iso } f &= (f (\text{Left } ()), f (\text{Right } ())) \end{aligned}$$

- (c) Usando a função $\text{distr} :: a \times (b + c) \rightarrow (a \times b + a \times c)$, defina no estilo *point-free* a função $\text{iso}^{-1} :: a \times a \rightarrow (2 \rightarrow a)$.

3. Considere a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \text{exp} &:: (a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) \\ \text{exp } f &= \overline{f \circ \text{ap}} \end{aligned}$$

- (a) Desenhe o respectivo diagrama.
- (b) Demonstre que $\text{exp } f \circ \text{exp } g = \text{exp } (f \circ g)$.
- (c) Demonstre que exp pode também ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{exp} &:: (a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) \\ \text{exp } f g &= f \circ g \end{aligned}$$

4. Demonstre o isomorfismo $a \rightarrow 1 \cong 1$.
5. Considere o isomorfismo $2 \times a \cong a + a$. É possível definir em *point-free* a seguinte função que testemunha este isomorfismo:

```

iso :: 2 × a → a + a
iso = (snd + snd) ∘ distl
  where distl :: (a + b) × c → (a × c + b × c)
        distl = ap ∘ ((inl ∇ inr) × id)

```

- (a) Defina a função *iso* no estilo *point-free* sem usar a função *distl*.
- (b) Demonstre que a definição que obteve é equivalente à apresentada acima.
6. Considere o isomorfismo $(a \rightarrow b) \times (a \rightarrow c) \cong a \rightarrow (b \times c)$.
- (a) Defina no estilo *point-free* a função *split* :: $(a \rightarrow b) \times (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \times c))$.
- (b) Demonstre que $\overline{\text{split}} = (\Delta)$, ou seja $\text{split } (f, g) x = (f x, g x)$.