Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2019/20 - Ficha nr.° 12

1. Considere a função recursiva

$$f \cdot \mathsf{in} = g \cdot \mathsf{F}\ \langle id, f \rangle \tag{F1}$$

definida genericamente sobre um tipo indutivo $\mathsf{T} \cong \mathsf{F}\ \mathsf{T}$. Apresente as justificações que faltam no cálculo que se segue e que mostra que f é um hilomorfismo:

$$\begin{array}{ll} & f \cdot \mathsf{in} = g \cdot \mathsf{F}\ \langle id, f \rangle \\ \equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & f = g \cdot \mathsf{F}\ (id \times f) \cdot \mathsf{F}\ \langle id, id \rangle \cdot \mathsf{out} \\ \equiv & \qquad \{ \ \text{defina-se } \mathsf{G}\ f = \mathsf{F}\ (id \times f) \ \} \\ & f = g \cdot \mathsf{G}\ f \cdot \mathsf{F}\ \langle id, id \rangle \cdot \mathsf{out} \\ \equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & f = (\!|\, g \,|\!) \cdot [\!(\mathsf{F}\ \langle id, id \rangle \cdot \mathsf{out})\!] \\ \Box & \end{array}$$

Faça um diagrama do hilomorfismo (genérico) que se obtém identificando o tipo indutivo da estrutura virtual intermédia. Instancie esta questão para a função factorial.

2. Recordando o combinador $\mathsf{for}\ b\ i = (\!|\, [\underline{i}, b] \,|\!)$, seja definido o ciclo

$$k = (\!|\, [\underline{u\ i}, g \bullet id] \,|\!) \tag{F2}$$

onde $g : A \to \mathsf{T}\ A$ para um dado mónade $A \xrightarrow{u} \mathsf{T}\ A \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ A)$. Faça um diagrama para k e mostre que k é a função

$$\begin{array}{l} k\ 0 = \mathsf{return}\ i \\ k\ (n+1) = \mathbf{do}\ \{ x \leftarrow k\ n; g\ x \} \end{array}$$

NB: para a unidade de um monad usam-se as notações return e u indistintamente.
Sugestão: use

$$(f \bullet g)\ a \quad = \quad \mathbf{do}\ \{ b \leftarrow g\ a; f\ b \} \tag{F3}$$

e outras leis que conhece do cálculo de mónades.

3. Em Haskell, um mónade declara-se instanciando a classe $Monad$, onde se define a unidade u (que aí se designa por return) e uma operação $x \ggg f$, conhecida como aplicação monádica, ou *"binding"* de f a x, que é tal que

$$x \ggg f = (f \bullet id)\ x = (\mu \cdot \mathsf{T}\ f)\ x \tag{F4}$$

Mostre que:

$$\mu = (\ggg id) \tag{F5}$$
$$g \bullet f = (\ggg g) \cdot f \tag{F6}$$
$$x \ggg (f \bullet g) = (x \ggg g) \ggg f \tag{F7}$$

4. É vulgar executar computações em modo *verbose*, em que cada passo da computação produz não só o respectivo resultado mas também uma mensagem dizendo o que fez. Ou seja, é registado um *log* da computação.

   Computações com *log* podem ser captadas por um monad $\mathsf{T}\ X = String^* \times X$. Identifique a sua unidade u e multiplicação μ e mostre que satisfazem as leis monádicas $\mu \cdot u = id = \mu \cdot \mathsf{T}\ u$ e $\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{T}\ \mu$. De seguida, implemente este monad em Haskell, usando a sintaxe $\mathbf{data}\ \mathsf{T}\ x = \mathsf{T}\ ([String], x)$ e teste-o com exemplos.

5. Considere o catamorfismo (monádico) de listas

$$mmap\ f = (\!|\, [\mathsf{return} \cdot \mathsf{nil}, lift\ \mathsf{cons}] \cdot (id + f \times id) \,|\!) \tag{F8}$$

   onde

$$lift\ h\ (x, y) = \mathbf{do}\ \{ a \leftarrow x; b \leftarrow y; \mathsf{return}\ (\overline{h}\ a\ b) \} \tag{F9}$$

   Mostre que $mmap\ f$ é a função:

$$\begin{cases} mmap\ f\ [\,] = \mathsf{return}\ [\,] \\ mmap\ f\ (h : t) = \mathbf{do}\ \{ a \leftarrow f\ h; b \leftarrow mmap\ f\ t; \mathsf{return}\ (a : b) \} \end{cases} \tag{F10}$$

   NB: para a unidade de um monad usam-se as notações return e u indistintamente.
   Sugestão para trabalho em casa: usando a biblioteca $Probability$ que vem anexa ao trabalho prático, defina a função $f\ x$ que dá x^2 ou $x + 1$, ambos com probabilidade 50%, e teste o comportamento de $mmap\ f$ no GHCi.

6. Suponha um tipo indutivo $\mathsf{T}\ X$ cuja base é o bifunctor

$$\mathsf{B}\ (X, Y) = X + \mathsf{F}\ Y$$
$$\mathsf{B}\ (f, g) = f + \mathsf{F}\ g$$

   onde F é um outro qualquer functor.

   - Mostre que $\mathsf{T}\ X$ é um mónade em que

     $$\mu = (\!|\, [id, \mathsf{in} \cdot i_2] \,|\!)$$
     $$u = \mathsf{in} \cdot i_1$$

     onde $\mathsf{in} : \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X) \to \mathsf{T}\ X$.
   - Alguns mónades conhecidos, por exemplo LTree, resultam desta lei geral. Identifique F em cada caso.
   - Para $\mathsf{F}\ Y = 1$ (e $\mathsf{F}\ f = id$) qual é o mónade que se obtém por esta regra? E no caso em que $\mathsf{F}\ Y = O \times Y^*$, onde o tipo O se considera fixo à partida?