

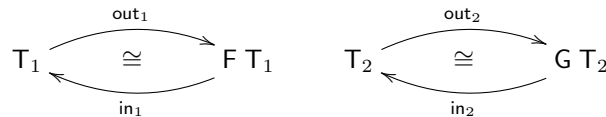
Cálculo de Programas

2.º ano

Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2019/20 - Ficha nr.º 11

1. O facto de $\text{length}: A^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ poder ser definida tanto como *catamorfismo* de listas como *anamorfismo* de naturais (que foi assunto de uma questão de uma ficha anterior) pode generalizar-se da forma seguinte: sejam dados dois tipos indutivos



e $\alpha : F X \rightarrow G X$, isto é, α satisfaz a propriedade *grátis*

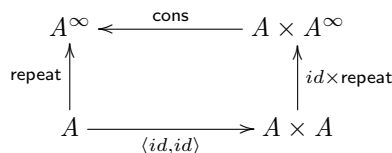
$$G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \tag{F1}$$

Então $(\text{in}_2 \cdot \alpha) = [(\alpha \cdot \text{out}_1)]$, como se mostra a seguir (complete as justificações):

$$\begin{aligned}
 & k = (\text{in}_2 \cdot \alpha) \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & k \cdot \text{in}_1 = \text{in}_2 \cdot \alpha \cdot F k \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \text{out}_2 \cdot k = G k \cdot \alpha \cdot \text{out}_1 \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & k = [(\alpha \cdot \text{out}_1)] \\
 & \square
 \end{aligned}$$

Identifique T_1 , T_2 e α no caso de length .

2. Mostre que o anamorfismo $\text{repeat} = [(\langle \text{id}, \text{id} \rangle)]$ definido pelo diagrama



é a função: $\text{repeat } a = a : \text{repeat } a$. De seguida, recorrendo às leis dos anamorfismos mostre que, apesar de não terminar¹, repeat satisfaz a propriedade:²

$$\text{map } f \cdot \text{repeat} = \text{repeat} \cdot f \tag{F2}$$

¹Por isso usamos, no diagrama, A^∞ em vez de A^* , para incluir também as listas infinitas.
²“Verifique” este facto comparando, por exemplo, $(\text{take } 10 \cdot \text{map succ} \cdot \text{repeat}) 1$ com $(\text{take } 10 \cdot \text{repeat} \cdot \text{succ}) 1$.

3. Nas aulas teóricas viu-se que, sempre que um ciclo-*while* termina, ele pode ser definido por

$$\mathbf{while} \ p \ f \ g = \mathbf{tailr} \ ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \tag{F3}$$

recorrendo ao combinador de “tail recursion” $\mathbf{tailr} \ f = \llbracket \nabla, f \rrbracket$, que é um hilomorfismo de base $B \ (X, Y) = X + Y$, para $\nabla = [id, id]$.

- (a) Derive a definição *pointwise* de $\mathbf{while} \ p \ f \ g$, sabendo que qualquer $h = \llbracket f, g \rrbracket$ é tal que $h = f \cdot F \ h \cdot g$.
- (b) Complete a demonstração da lei de fusão de \mathbf{tailr} ³

$$(\mathbf{tailr} \ g) \cdot f = \mathbf{tailr} \ h \iff (id + f) \cdot h = g \cdot f$$

que se segue:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{tailr} \ g) \cdot f = \mathbf{tailr} \ h \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \llbracket \nabla \rrbracket \cdot \llbracket g \rrbracket \cdot f = \llbracket \nabla \rrbracket \cdot \llbracket h \rrbracket \\ \Leftarrow & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \llbracket g \rrbracket \cdot f = \llbracket h \rrbracket \\ \Leftarrow & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & g \cdot f = (id + f) \cdot h \end{aligned}$$

□

4. Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u ,

$$A \xrightarrow{u} T \ A \xleftarrow{\mu} T \ (T \ A)$$

que satisfazem (para além das naturais, ie. “grátis”) as propriedades $\mu \cdot u = id = \mu \cdot T \ u$ e $\mu \cdot \mu = \mu \cdot T \ \mu$ — identifique-as no formulário — com base nas quais se pode definir a *composição monádica*:

$$f \bullet g = \mu \cdot T \ f \cdot g.$$

(Identifique-a também no formulário.) Demonstre os factos seguintes:

$$\mu = id \bullet id \tag{F4}$$

$$f \bullet u = f \ \wedge \ f = u \bullet f \tag{F5}$$

$$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (T \ g \cdot h) \tag{F6}$$

$$T \ f = (u \cdot f) \bullet id \tag{F7}$$

5. A função $discollect : (A \times B^*)^* \rightarrow (A \times B)^*$ que apareceu (sem ser definida) numa questão das primeiras fichas não é mais do que

$$discollect = lstr \bullet id \tag{F8}$$

— onde $lstr \ (a, x) = [(a, b) \mid b \leftarrow x]$ — no mónade das listas, $T \ A = A^*$,

$$A \xrightarrow{singl} A^* \xleftarrow{concat} (A^*)^*$$

onde $u = singl$ e $\mu = concat = \llbracket [nil, conc] \rrbracket$. Recordando a lei de absorção-cata (para listas), derive uma definição recursiva para $discollect$ que não use nenhum dos combinadores ‘point-free’ estudados nesta disciplina.

³NB: Assume-se que $(\mathbf{tailr} \ g) \cdot f$ termina.