Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2019/20 - Ficha nr.° 4

1. No Cálculo de Programas, as definições condicionais do tipo $h\ x = \textbf{if}\ p\ x\ \textbf{then}\ f\ x\ \textbf{else}\ g\ x$ são escritas usando o combinador ternário $p \rightarrow f, g$ conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição

$$p \rightarrow f, g \quad = \quad [f\ , g] \cdot p?$$

vem no formulário. Baseando-se em leis deste combinador que constam também do formulário, demostre a chamada 2ª-lei do condicional de McCarthy:

$$(p \rightarrow f, g) \cdot h \quad = \quad (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$$

2. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k \ = \ k \tag{F1}$$
$$(p? + p?) \cdot p? \ = \ (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{F2}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle \ = \ p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{F3}$$
$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle \ = \ p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{F4}$$
$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) \ = \ p \rightarrow a, d \tag{F5}$$

3. Considere a função $\mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$ que exprime a forma como os números naturais são gerados a partir do número 0, de acordo com o diagrama seguinte,

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\underline{0}"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[d, "\mathsf{in}=[\underline{0}\ ,\mathsf{succ}]"] & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathsf{succ}"] \\
& \mathbb{N}_0 &
\end{tikzcd} \tag{F6}$$

onde $\mathsf{succ}\ n = n + 1$. Sabendo que o tipo 1 coincide com o tipo $()$ em Haskell e é habitado por um único elemento, também designado por $()$, calcule a inversa de in,

$\mathsf{out}\ 0 = i_1\ ()$
$\mathsf{out}\ (n + 1) = i_2\ n$

resolvendo em ordem a out a equação $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$ e introduzindo variáveis. (NB: poderá deste cálculo inferir que in e out são isomorfismos? Justifique.)

4. Seja dada a função

$$\begin{aligned}&\mathsf{ap} : (C^B \times B) \to C\\ &\mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x\end{aligned}$$

(a) Mostre, através da adição de variáveis, que a função f definida a seguir

$$f\ k = \mathsf{ap} \cdot (k \times id)$$

é a função

$$\begin{aligned}&\mathsf{uncurry} :: (a \to b \to c) \to (a, b) \to c\\ &\mathsf{uncurry}\ f\ (a, b) = f\ a\ b\end{aligned}$$

disponível em Haskell.

(b) Mostre que a igualdade

$$\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{curry}\ f \times id) = f \tag{F7}$$

corresponde à definição $\mathsf{curry}\ f\ a\ b = f\ (a, b)$ da função $\mathsf{curry} :: ((a, b) \to c) \to a \to b \to c$ também disponível em Haskell.

5. Abreviando $\mathsf{curry}\ f$ por $\overline{f}$, identifique a propriedade (F7) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação, que a seguir se descreve através de um diagrama:

$$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "ap"] & C \\ A \arrow[u, "k"] & A \times B \arrow[u, "k \times id"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad k = \overline{f} \ \equiv\ \mathsf{ap} \cdot (k \times id) = f$$

6. Considere o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} A^{B+C} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{unjoin}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A^B \times A^C \arrow[ll, bend left, "\mathsf{join}"] \end{tikzcd} \tag{F8}$$

onde

$$\begin{aligned}&\mathsf{join}\ (f, g) = [f\ , g]\\ &\mathsf{unjoin}\ k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2)\end{aligned}$$

Mostre que $\mathsf{join} \cdot \mathsf{unjoin} = id$ e que $\mathsf{unjoin} \cdot \mathsf{join} = id$.

7. Complete os “?”do diagrama

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[rr, bend left, "\mathsf{unsplit}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & ? \arrow[ll, bend left, "\mathsf{split}"] \end{tikzcd}$$

onde

$$\begin{aligned}&\mathsf{split}\ (f, g) = \langle f, g\rangle\\ &\mathsf{unsplit}\ k = (\pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k)\end{aligned}$$