

Cálculo de Programas

2.º ano

Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2019/20 - Ficha nr.º 3

1. Considere o isomorfismo

$$(A + B) + C \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{coassocr}} \\ \cong \\ \xleftarrow{\text{coassocl}} \end{array} A + (B + C)$$

onde $\text{coassocr} = [id + i_1, i_2 \cdot i_2]$. Calcule a sua conversa resolvendo em ordem a coassocl a equação,

$$\text{coassocl} \cdot \text{coassocr} = id$$

isto é

$$\text{coassocl} \cdot \underbrace{[id + i_1, i_2 \cdot i_2]}_{\text{coassocr}} = id$$

etc. Finalmente, exprima coassocl sob a forma de um programa em Haskell *não recorra* ao combinador "either".

2. O combinador

$$\begin{array}{l} \text{const} :: a \rightarrow b \rightarrow a \\ \text{const } a \ b = a \end{array}$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\text{const } k$ por \underline{k} , qualquer que seja k . Demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{F1}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes que constam do formulário.

3. Considere a função $\text{iso} = \langle ! + !, [id, id] \rangle$, onde $! : A \rightarrow 1$ designa a única função constante que habita o tipo $A \rightarrow 1$.¹

(a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando-a sob a forma de um diagrama de tipos.

(b) Derive a partir desse diagrama a propriedade (dita *grátis*) de iso ,

$$(id \times f) \cdot \text{iso} = \text{iso} \cdot (f + f) \tag{F2}$$

¹A função $! : A \rightarrow 1$ costuma-se designar-se também por função "bang".

- (c) Confirme, por cálculo analítico, essa propriedade.
- (d) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de iso.
4. Deduza o tipo mais geral da função $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.
5. Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural (“grátis”) é

$$(f + h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f + g \times h)$$

6. Para o caso de um *isomorfismo* f , têm-se as equivalências:

$$f \cdot g = h \equiv g = f^\circ \cdot h \tag{F3}$$

$$g \cdot f = h \equiv g = h \cdot f^\circ \tag{F4}$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \text{distr} \cdot (g \times (id + f)) = k$$

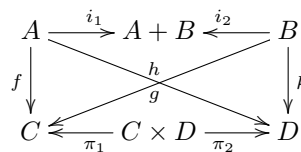
é equivalente à igualdade

$$h \cdot (g \times id + g \times f) = k \cdot \text{undistr}$$

(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo *distr*.)

7. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.
8. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] = \langle [f, h], [g, k] \rangle$$



Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos.

9. Use a lei da troca para exprimir o isomorfismo $\text{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$ sob a forma de um ‘split’ de alternativas.