

Travessias de árvores binárias

Para converter uma árvore binária numa lista podemos usar diversas estratégias, como por exemplo:

Preorder: R E D R – visitar a raiz
Inorder: E R D E – atravessar a sub-árvore esquerda
Postorder: E D R D – atravessar a sub-árvore direita

```
preorder :: ArvBin a -> [a]
preorder Vazia = []
preorder (Node x e d) = [x] ++ (preorder e) ++ (preorder d)
```

```
inorder :: ArvBin a -> [a]
inorder Vazia = []
inorder (Node x e d) = (inorder e) ++ [x] ++ (inorder d)
```

```
postorder :: ArvBin a -> [a]
postorder Vazia = []
postorder (Node x e d) = (postorder e) ++ (postorder d) ++ [x]
```

85

Árvores Binárias de Procura

Uma árvore binária diz-se de procura, se é vazia, ou se verifica todas as seguintes condições:

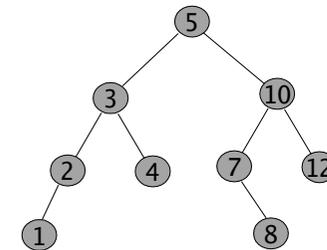
- a raiz da árvore é maior do que todos os elementos da sub-árvore esquerda;
- a raiz da árvore é menor do que todos os elementos da sub-árvore direita;
- ambas as sub-árvores são árvores binárias de procura.

Exemplo: Predicado para testar se uma dada árvore binária é de procura.

```
arvBinProcura Vazia = True
arvBinProcura (Node x e d) =
  (x > maximum (preorder e)) && (x < minimum (preorder d))
  && (arvBinProcura e) && (arvBinProcura d)
```

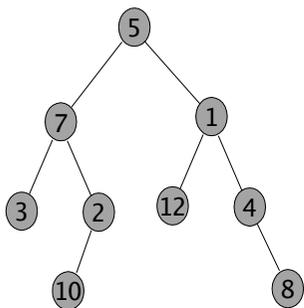
Exemplo: A árvore seguinte é uma árvore binária de procura.

Qual é o termo que a representa ?



87

```
arv = (Node 5 (Node 7 (Node 3 Vazia Vazia)
                  (Node 2 (Node 10 Vazia Vazia) Vazia)
              )
      (Node 1 (Node 12 Vazia Vazia)
              (Node 4 Vazia (Node 8 Vazia Vazia))
          )
  )
```



preorder arv ⇒ [5,7,3,2,10,1,12,4,8]

inorder arv ⇒ [3,7,10,2,5,12,1,4,8]

postorder arv ⇒ [3,10,2,7,12,8,4,1,5]

86

Exemplo: Acrescentar um elemento à árvore binária de procura.

```
insABProc x Vazia = (Node x Vazia Vazia)
insABProc x (Node y e d)
  | x < y = Node y (insABProc x e) d
  | y < x = Node y e (insABProc x d)
  | x == y = Node y e d
```

Note que os elementos repetidos não estão a ser acrescentados à árvore de procura.

O que alteraria para, relaxando a noção de árvore binária de procura, aceitar elementos repetidos na árvore ?

Exercício: Qual é a função de travessia que aplicada a uma árvore binária de procura retorna uma lista ordenada com os elementos da árvore ?

O formato da árvore depende da ordem pela qual os elementos vão sendo inseridos.

Exercício: Desenhe as árvores resultantes das seguintes seqüências de inserção numa árvore inicialmente vazia.

- 7, 4, 9, 6, 1, 8, 5
- 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- 6, 4, 1, 8, 9, 5, 7

Exercício: Defina uma função que recebe uma lista e constroi uma árvore binária de procura com os elementos da lista.

88

Árvores Balanceadas

Uma árvore binária diz-se *balanceada* (ou, *equilibrada*) se é *vazia*, ou se verifica as seguintes condições:

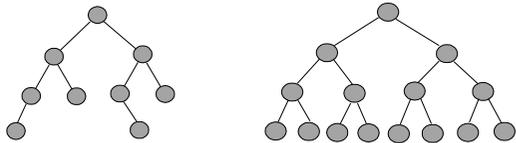
- as alturas da sub-árvores esquerda e direita diferem no máximo em uma unidade;
- ambas as sub-árvores são árvores balanceadas.

Exemplo: Predicado para testar se uma dada árvore binária é balanceada.

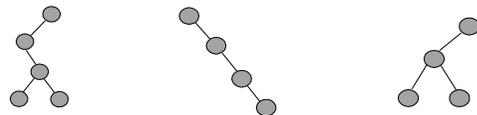
```
balanceada Vazia = True
balanceada (Nodo _ e d) = (abs ((altura e)-(altura d))) <= 1
                        && (balanceada e) && (balanceada d)
```

Exemplos:

Balanceadas:



Não balanceadas:



89

Chama-se **chave** ao componente de informação que é único para cada entidade. Por exemplo: o nº de BI é chave para cada cidadão; nº de aluno é chave para cada estudante universitário; nº de contribuinte é chave para cada empresa.

Uma medida da eficiência de uma pesquisa é a o número de comparações de chaves que são feitas até que se encontre o elemento a pesquisar. É claro que isso depende da posição da chave na estrutura de dados.

O número de comparações de chaves numa pesquisa:

- numa lista, é no máximo igual ao comprimento da lista;
- numa árvore binária de procura, é no máximo igual à altura da árvore.

Assim, a pesquisa em árvores binárias de procura são especialmente mais eficientes se as árvores forem balanceadas.

Porquê ?

91

As árvores binárias de procura são estruturas de dados que possibilitam pesquisas potencialmente mais eficientes da informação, do que as pesquisas em listas.

Exemplo:

A tabela de associações BI – Nome, pode ser guardada numa árvore binária de procura com o tipo `ArvBin (BI, Nome)`.

A função de pesquisa nesta árvores binária de procura organizada por BI pode ser definida por

```
pesquisaABProc :: BI -> ArvBin (BI, Nome) -> Maybe Nome
pesquisaABProc n Vazia = Nothing
pesquisaABProc n (Nodo (x,y) e d)
  | n == x = Just y
  | n < x = pesquisaABProc n e
  | n > x = pesquisaABProc n d
```

90

Existem algoritmos de inserção que mantêm o equilíbrio das árvores (mas não serão apresentados nesta disciplina).

Exemplo: A partir de uma lista ordenada por ordem crescente de chaves podemos construir uma árvore binária de procura balanceada, através da função

```
constroiArvBal [] = Vazia
constroiArvBal xs = Nodo x (constroiArvBal xs1) (constroiArvBal xs2)
  where
    k = (length xs) `div` 2
    xs1 = take k xs
    (x:xs2) = drop k xs
```

Exercícios:

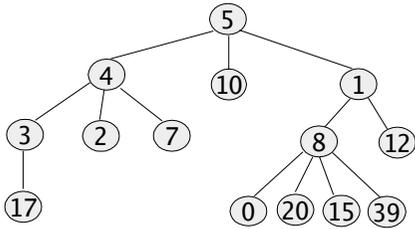
- Defina uma função que dada uma árvore binária de procura, devolve o seu valor mínimo.
- Defina uma função que dada uma árvore binária de procura, devolve o seu valor máximo.
- Como poderá ser feita a remoção de um nodo de uma árvore binária de procura, de modo a que a árvore resultante continue a ser de procura ? Defina uma função que implemente a estratégia que indicou.

92

Outras Árvores

Árvores Irregulares
(finitely branching trees)

```
data Tree a = Node a [Tree a]
```



Esta árvore do tipo **(Tree Int)** é representada pelo termo:

```
Node 5 [ Node 4 [ Node 3 [Node 17 [],
                    Node 2 [], Node 7 []
                ],
        Node 10 [],
        Node 1 [ Node 8 [ Node 0 [], Node 20 [],
                        Node 15 [], Node 39 []
                    ],
                Node 12 []
            ]
    ]
```

93

“Records”

Numa declaração de um tipo algébrico os construtores podem ser declarados associando a cada um dos seus parâmetros um nome (uma etiqueta).

Exemplo:

```
data PontoC = Pt {xx :: Float, yy :: Float, cor :: Cor}
```

desta forma, para além do construtor de dados

```
Pt :: Float -> Float -> Cor -> PontoC
```

também ficam definidos os nome dos *campos* **xx**, **yy** e **cor**, e 3 *selectores* com o mesmo nome:

```
xx :: PontoC -> Float
yy :: PontoC -> Float
cor :: PontoC -> Cor
```

Os valores do novo tipo PontoC podem ser construídos da forma usual, por aplicação do construtor aos seus argumentos.

```
p1 = (Pt 3.2 5.5 Azul) :: PontoC
```

Além disso, o nome dos campos podem agora também ser usados na construção de valores do novo tipo.

```
p2 = Pt {xx=3.1, yy=8.0, cor=Vermelho} :: PontoC
p3 = Pt {cor=Verde, yy=2.2, xx=7.1} :: PontoC
```

95

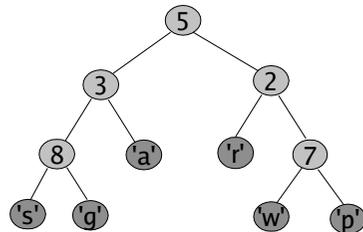
Outras Árvores

Full Trees

Árvores com *nós* (intermédios) do tipo a e *folhas* do tipo b.

```
data ABin a b = Folha b
              | No a (ABin a b) (ABin a b)
```

Esta árvore do tipo **(ABin Int Char)** é representada pelo termo:



```
(No 5 (No 3 (No 8 (Folha 's') (Folha 'g'))
        (Folha 'a'))
    (No 2 (Folha 'r')
        (No 7 (Folha 'w') (Folha 'p'))
    )
)
```

94

“Records”

Note que $\left\{ \begin{array}{l} (Pt\ 3.2\ 5.5\ Azul) \\ Pt\ \{xx=3.2,\ yy=5.5,\ cor=Azul\} \\ Pt\ \{yy=5.5,\ cor=Azul,\ xx=3.2\} \end{array} \right\}$ são exactamente o mesmo valor.

Aos tipos com um único construtor e com os campos etiquetados dá-se o nome de *records*.

Os padrões podem também usar o nome dos campos (todos ou alguns, por qualquer ordem).

Exemplo: Três versões equivalentes da função que calcula a distância de um ponto à origem.

```
dist0 :: PontoC -> Float
dist0 p = sqrt ((xx p)^2 * (yy p)^2)
```

```
dist0' :: PontoC -> Float
dist0' Pt {xx=x, yy=y} = sqrt (x^2 * y^2)
```

```
dist0'' :: PontoC -> Float
dist0'' (Pt x y c) = sqrt (x^2 * y^2)
```

96