Métodos Formais de Programação I

Exame Final (2ª Chamada)
2 de Fevereiro de 2005

I
Recorde os operadores `:->` e `++` sobre correspondências disponíveis em VDM-SL e cuja semântica relacional é dada por

$$\begin{array}{rcl} [\![\texttt{m :-> s}]\!] & \triangleq & (rng\,[\![\texttt{m}]\!] - [\![\texttt{s}]\!]) \cdot [\![\texttt{m}]\!] \\ [\![\texttt{m ++ n}]\!] & \triangleq & ([\![\texttt{n}]\!] \rightarrow [\![\texttt{n}]\!], [\![\texttt{m}]\!]) \end{array}$$

onde

$$(R \rightarrow S, T) \triangleq (S \cdot dom\,R) \cup (T \cdot (\mathsf{id} - dom\,R))$$

Verifique a validade das seguintes leis (expressas em notação VDM-SL):

1. `rng(m :-> s) = s inter rng(m)`
2. `(m :-> s) ++ (n :-> s) = (m ++ n) :-> s`

II
Seja f uma função e R uma relação binária tal que $img\,R \subseteq ker\,f$. A que propriedade da composta $f \cdot R$ é este facto equivalente? Apresente com detalhe todos os cálculos que necessitar de efectuar.

Resolução
A composta será simples, porque

$$\begin{array}{cl} & img\,R \subseteq ker\,f \\ \equiv & \quad \{ \text{ definições } \} \\ & R \cdot R^\circ \subseteq f^\circ \cdot f \\ \equiv & \quad \{ \text{ identidade } \} \\ & R \cdot R^\circ \subseteq f^\circ \cdot \mathsf{id} \cdot f \\ \equiv & \quad \{ \text{ shunting } \} \\ & f \cdot (R \cdot R^\circ) \subseteq \mathsf{id} \cdot f \\ \equiv & \quad \{ \text{ 'converse' shunting } \} \\ & f \cdot (R \cdot R^\circ) \cdot f^\circ \subseteq \mathsf{id} \\ \equiv & \quad \{ \text{ associatividade de composição e converso } \} \\ & (f \cdot R) \cdot (f \cdot R)^\circ \subseteq \mathsf{id} \\ \equiv & \quad \{ \text{ definição } \} \\ & img\,(f \cdot R) \subseteq \mathsf{id} \end{array}$$

III
Considere duas classes particulares de relações binárias: as *co-reflexivas* (que satisfazem $R \subseteq \mathsf{id}$) e as *polarizações* (que verificam $R = \top \cdot R$). Qualquer destas classes pode ser usada para representar

conjuntos no cálculo relacional. Assim, seja W um conjunto e designemos respectivamente por $[\![W]\!]$ e $[\![W]\!]_\top$ a co-reflexiva e a polarização correspondentes, de acordo com:

$$\begin{array}{rcl} x\,[\![W]\!]\,y & \triangleq & x = y \;\wedge\; y \in W \\ x\,[\![W]\!]_\top\,y & \triangleq & y \in W \end{array}$$

1. Para $A = \{8, 2\}$ represente $[\![A]\!]$ e $[\![A]\!]_\top$ como conjuntos de pares.

2. Especifique, em VDM-SL, a função `polar2corr`, paramétrica no tipo de dados, que converte uma polarização na coreflexiva correspondente. Especifique, igualmente, a sua inversa.

3. Complete a prova seguinte do facto $dom\,(\top \cdot A) \;=\; A$, para qualquer co-reflexiva A:

$$\begin{array}{cl} & \ldots \\ \equiv & \quad \{ \text{ Galois } \} \\ & \top \cdot A \;\subseteq\; \top \cdot B \\ \equiv & \quad \{ \text{ } \Rightarrow\text{: porque ...} \qquad \Leftarrow\text{: porque ... e monotonia } \} \\ & A \;\subseteq\; \top \cdot B \\ \equiv & \quad \{ \text{ ... } \} \\ & A \;\subseteq\; \top \cdot B \cap \mathsf{id} \\ \equiv & \quad \{ \text{ ... } \} \\ & A \;\subseteq\; \ldots \end{array}$$

Resolução

$$\begin{array}{cl} & dom\,(\top \cdot A) \;\subseteq\; B \\ \equiv & \quad \{ \text{ Galois } \} \\ & \top \cdot A \;\subseteq\; \top \cdot B \\ \equiv & \quad \{ \text{ } \Rightarrow\text{: porque } \mathsf{id} \subseteq \top \qquad \Leftarrow\text{: porque } \top \cdot \top = \top \text{ e monotonia } \} \\ & A \;\subseteq\; \top \cdot B \\ \equiv & \quad \{ \text{ } A \text{ co-reflexiva } \} \\ & A \;\subseteq\; \top \cdot B \cap \mathsf{id} \\ \equiv & \quad \{ \text{ } B \text{ co-reflexiva: logo, } B = \top \cdot B \cap \mathsf{id} \} \\ & A \;\subseteq\; B \end{array}$$

4. Mostre se a equação acima permanece válida se A fôr uma *polarização* (**Sugestão**: poderá ser útil recorrer à lei $\top \cdot dom\,R \;=\; \top \cdot R$ provada nas aulas).

Resolução
A equação anterior não pode permanecer válida uma vez que o domínio de qualquer relação é uma coreflexiva. Verifica-se, no entanto, $\top \cdot dom\,A = A$ porque

$$\begin{array}{cl} & \top \cdot dom\,A \\ \equiv & \quad \{ \text{ } \top \cdot dom\,R\,\top \cdot R \} \\ & \top \cdot A \\ \equiv & \quad \{ \text{ } A \text{ é uma polarização } \} \\ & A \end{array}$$

5. Mostre que

$$R = dom\, R \quad \equiv \quad R \subseteq \mathsf{id}$$

e explique, sucinta mas rigorosamente, a razão pela qual esta equivalência formaliza o facto de *as co-reflexivas serem os pontos fixos do operador domínio de uma relação.*

Resolução
A implicação

$$R = dom\, R \quad \Rightarrow \quad R \subseteq \mathsf{id}$$

é óbvia dado que o domínio de qualquer relação é sempre uma co-reflexiva. Para a implicação conversa considere-se

$$\begin{array}{ll} & dom\, R \;\subseteq\; A \\ \equiv & \quad \{ \text{ Galois } \} \\ & R \;\subseteq\; \top \cdot A \\ \equiv & \quad \{ \text{ hipótese: } R \subseteq \mathsf{id} \} \\ & R \;\subseteq\; \top \cdot A \cap \mathsf{id} \\ \equiv & \quad \{ \text{ } A \text{ é co-reflexiva (logo } A = \top \cdot A \cap \mathsf{id}) \} \\ & R \;\subseteq\; A \end{array}$$

IV
Considere o seguinte modelo em VDM-SL de uma base de dados de produção de uma fábrica de brinquedos (relembre o problema 9 dos Guiões):

```
types

PPD :: S: Stock
       P: Pricelist
       E: EquipDb;
Stock = map Unit to Quantity;
Unit = Equip | Comp;
Quantity = nat;
Equip :: K: nat;
Comp :: K: nat;
Pricelist = map Comp to Currency;
Currency = real;
EquipDb = map Equip to map Unit to Quantity;
```

Especifique a função que calcula o custo de produção de um determinado equipamento:

```
Costs: PPD * Equip -> Currency
```