14 Dez, 2004

EXERCÍCIO (MFP1)

Análise de $dom\, R \subseteq A \;\equiv\; R \subseteq \top \cdot A$

Justificar definição explícita: $dom\, R = \mathsf{id} \cap \top \cdot R$

$$
\begin{array}{ll}
 & R \subseteq \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{ \text{identidade} \} \\
 & \mathsf{id} \cdot R \subseteq \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{ \top \text{ é topo e } \top \cdot \top = \top \} \\
 & (\top \cdot \top \cap \mathsf{id}) \cdot R \subseteq \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{ \top \cdot \top \cap \mathsf{id} \subseteq \top \cdot \top^\circ \text{ e monotonia} \} \\
 & \top \cdot \top^\circ \cdot R \subseteq \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{ \top \text{ é topo} \} \\
 & \top \cap \top \cdot \top^\circ \cdot R \subseteq \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{ \text{Galois: } (\top)\cdot \text{ é adjunto superior} \} \\
 & \top \cdot (\mathsf{id} \cap \top^\circ \cdot R) \subseteq \top \cdot A \\
\Leftarrow & \quad \{ \text{monotonia} \} \\
 & \mathsf{id} \cap \top^\circ \cdot R \subseteq A \\
\equiv & \quad \{ \top = \top^\circ \} \\
 & \mathsf{id} \cap \top \cdot R \subseteq A
\end{array}
$$

Nota

O resultado usado no terceiro passo é uma consequência da lei modular

$$(R \cdot S) \cap T \;\subseteq\; R \cdot (S \cap (R^\circ \cdot T)) \tag{51}$$

que, para $S := \top$, origina

$$
\begin{aligned}
(R \cdot \top) \cap T \;&\subseteq\; R \cdot (\top \cap (R^\circ \cdot T)) && (52)\\
&\subseteq\; R \cdot R^\circ \cdot T && (53)
\end{aligned}
$$

prosseguindo, agora, com $T := \mathsf{id}$ vem

$$(R \cdot \top) \cap \mathsf{id} \;\subseteq\; R \cdot R^\circ \tag{54}$$

que foi o resultado usado (com $R := \top$).

Nota à Nota

Claramente

$$(R \cdot \top) \cap \mathsf{id} \subseteq R \cdot R^\circ \tag{55}$$

$$\subseteq R \cdot R^\circ \cap \mathsf{id} \tag{56}$$

Notando, por outro lado, que $R^\circ \subseteq \top$, obtem-se a igualdade:

$$(R \cdot \top) \cap \mathsf{id} = R \cdot R^\circ \cap \mathsf{id} \tag{57}$$

Dualizando

Se partirmos da versão dual da lei modular:

$$(R \cdot S) \cap T \subseteq (R \cap (T \cdot S^\circ)) \cdot S \tag{58}$$

instanciando $R := \top$ vem

$$(\top \cdot S) \cap T \subseteq T \cdot S^\circ \cdot S \tag{59}$$

e, em particular,

$$(\top \cdot S) \cap \mathsf{id} = S^\circ \cdot S \cap \mathsf{id} \tag{60}$$

Retomando a prova acima verifiquemos a implicação no outro sentido:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{id} \cap \top \cdot R \subseteq A \\
\equiv & \quad \left\{ A^\circ = A \text{ e } A \cdot B = A \cap B, \text{ para } A, B \text{ correflexivas} \right\} \\
 & \mathsf{id} \cap \top \cdot R \subseteq A^\circ \cdot A \\
\equiv & \quad \left\{ A \text{ correflexiva} \right\} \\
 & \mathsf{id} \cap \top \cdot R \subseteq \mathsf{id} \cap A^\circ \cdot A \\
\equiv & \quad \left\{ (\top \cdot R) \cap \mathsf{id} = R^\circ \cdot R \cap \mathsf{id} \right\} \\
 & \mathsf{id} \cap \top \cdot R \subseteq \mathsf{id} \cap \top \cdot A \\
\Leftarrow & \quad \left\{ \text{monotonia} \right\} \\
 & \top \cdot R \subseteq \top \cdot A \\
\equiv & \quad \left\{ \top \cdot \top = \top \right\} \\
 & \top \cdot R \subseteq \top \cdot \top \cdot A \\
\Leftarrow & \quad \left\{ \text{monotonia} \right\} \\
 & R \subseteq \top \cdot A
\end{array}$$

$\boxed{\text{Verificar a definição } \mathit{dom}\, R \subseteq A \;\equiv\; R = R \cdot A}$

Basta mostrar que $R = R \cdot A \;\equiv\; R \subseteq \top \cdot A$:

$$
\begin{array}{ll}
 & R = R \cdot A \;\equiv\; R \subseteq \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{\, \top \text{ é topo} \,\} \\
 & R = R \cdot A \;\Leftarrow\; R \subseteq \top \cdot A \\
\Leftarrow & \quad \{\, \text{definição de } \cap \,\} \\
 & R \cdot A \;=\; R \cap \top \cdot A
\end{array}
$$

e agora

$$
\begin{array}{ll}
 & R \cdot A \;=\; R \cap \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{\, R \cdot A \subseteq R \text{ (porque } A \text{ correflexiva) e } R \cdot A \subseteq \top \cdot A \text{ (porque } R \subseteq \top) \,\} \\
 & R \cdot A \;\supseteq\; R \cap \top \cdot A \\
\equiv & \quad \{\, \text{lei modular } (R \cdot S) \cap T = (R \cap (T \cdot S^\circ) \cdot S \text{ com } R := \top, S := A, T := R \,\} \\
 & R \cdot A \;\supseteq\; (R \cdot A^\circ \cap \top) \cdot A \\
\Leftarrow & \quad \{\, \text{monotonia} \,\} \\
 & R \;\supseteq\; R \cdot A^\circ \cap \top \\
\equiv & \quad \{\, \top \text{ é topo} \,\} \\
 & R \;\supseteq\; R \cdot A^\circ \\
\equiv & \quad \{\, A \text{ correflexiva} \,\} \\
 & true
\end{array}
$$

Provar que $\top \cdot dom\, R = \top \cdot R$

$$
\begin{array}{ll}
 & \top \cdot R \ \subseteq \ \top \cdot dom\, R \\
\equiv & \quad \{ \top \cdot \top = \top \} \\
 & \top \cdot R \ \subseteq \ \top \cdot \top \cdot dom\, R \\
\Leftarrow & \quad \{ \text{monotonia} \} \\
 & R \ \subseteq \ \top \cdot dom\, R \\
\equiv & \quad \{ \text{Galois: cancelamento} \} \\
 & true
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{ll}
 & \top \cdot dom\, R \ \subseteq \ \top \cdot R \\
\equiv & \quad \{ \top \cdot \top = \top \} \\
 & \top \cdot dom\, R \ \subseteq \ \top \cdot \top \cdot R \\
\Leftarrow & \quad \{ \text{monotonia} \} \\
 & dom\, R \ \subseteq \ \top \cdot R \\
\Leftarrow & \quad \{ dom\, R = \mathsf{id} \cap \top \cdot R \} \\
 & true
\end{array}
$$