

## Quantificação (segunda) de campo electromagnético

No tratamento anterior que considerava o campo e.m. como objecto clássico, as amplitudes  $a_{k,\lambda}$  puderam variar continuamente e também a energia de cada moda  $\omega^2|a_{k,\lambda}|^2/(2\pi c^2)$ . Mas, como se conhece desde trabalhos de Planck (1900), a energia de campo e.m. esta quantificada em múltiplos de  $\hbar\omega$ . Portanto o valor de  $|a_{k,\lambda}|^2$  só deve variar por múltiplos de  $2\pi\hbar c^2/\omega$ , como se fosse o valor próprio de operador:

$$\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega} \hat{n}_{k,\lambda} \quad \begin{array}{l} \text{operador de n}^\circ \text{ de} \\ \text{fotões em moda } k,\lambda \end{array}$$

De facto, a clássica  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  anterior já pode considerar-se a “função de onda” de 1ª quantificação, ao lado de função  $\psi(\mathbf{r},t)$  para partículas de matéria. O tratamento consistente quântico obteve-se com 2ª quantificação de  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  junto com  $\psi(\mathbf{r},t)$ . Nesta formulação, Eq. (S) passa para:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \left[ \hat{a}_{k,\lambda} \boldsymbol{\lambda} e^{i(k\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger \boldsymbol{\lambda}^* e^{-i(k\mathbf{r}-\omega t)} \right] \quad (\text{S}')$$

onde os operadores  $\hat{a}_{k,\lambda}$  e  $\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger$  satisfazem às relações bosônicas de comutação:

$$\left[ \hat{a}_{k,\lambda}, \hat{a}_{k',\lambda'}^\dagger \right] = \delta_{k,k'} \delta_{\lambda,\lambda'}$$

idênticas às de oscilador harmónico. Portanto a expansão, Eq. (S'), chama-se a de osciladores elementares.

Estados possíveis de campo e.m. classificam-se como:

$$\left| N_{k_1,\lambda_1}(k_1), N_{k_1,\lambda_2}(k_1), N_{k_2,\lambda_1}(k_2), \dots \right\rangle$$

onde  $N_{k,\lambda} = 0, 1, \dots$ , e  $k_1 \neq k_2 \neq \dots$ . No formalismo da segunda quantificação, podemos considerar um operador de campo em RI com Hamiltoniano livre:

$$H_{0,\text{campo}} = \sum_{k,\lambda} \hbar c k \left( a_{k,\lambda}^\dagger a_{k,\lambda} + 1/2 \right)$$

De mesmo modo, o Hamiltoniano livre de matéria:

$$H_{0,\text{mater.}} = \sum_i \varepsilon_i b_i^\dagger b_i$$

envolve estados (fermiónicos):  $|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$ , com  $i_1 < i_2 < \dots < i_N$ .  
 Tratando estados gerais de várias partículas dos ambos tipos, vamos separar por ponto e vírgula os índices fermiónicos dos bosónicos:

$$|\dots, i, \dots; \dots, N_{k,\lambda}, \dots\rangle.$$

Por fim, o Hamiltoniano de interacção entre campo e.m. e matéria apresenta-se através dos operadores de campo em RI:

$$H_{\text{int}} = \int d\mathbf{r} \left[ -\frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{e^2}{2mc^2} \rho(\mathbf{r}, t) A^2(\mathbf{r}, t) \right]$$

contendo, aparte dos operadores bosónicos, Eq. (S'), também operadores fermiónicos:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \frac{e\hbar}{i} \nabla \psi(\mathbf{r}, t), \quad \text{densidade de corrente}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad \text{densidade de partículas}$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_l e^{i\varepsilon_l t/\hbar} \psi_l(\mathbf{r}) b_l.$$

Os elementos de matriz relevantes para “regra de ouro” são:

$$\langle 0; \dots, N_{k,\lambda} + 1, \dots | H_{int} | n; \dots, N_{k,\lambda}, \dots \rangle, \quad \text{emissão}$$

$$\langle n; \dots, N_{k,\lambda}, \dots | H_{int} | 0; \dots, N_{k,\lambda} + 1, \dots \rangle. \quad \text{absorção}$$

Por exemplo, para o processo de absorção este elemento resulta:

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}} \langle n | \mathbf{j}_{-k} \cdot \boldsymbol{\lambda} | 0 \rangle \langle \dots, N_{k,\lambda}, \dots | a_{k,\lambda} | \dots, N_{k,\lambda} + 1, \dots \rangle &= \\
 \text{electrónico} & \qquad \qquad \qquad \text{fotónico} \\
 = -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}} \langle n | \mathbf{j}_{-k} \cdot \boldsymbol{\lambda} | 0 \rangle \sqrt{N_{k,\lambda}} & \\
 \text{analogia com o} & \\
 \text{valor clássico } |a_{k,\lambda}| &
 \end{aligned}$$

Mas para o processo de emissão temos:

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}} \langle 0 | \mathbf{j}_k \cdot \boldsymbol{\lambda}^* | n \rangle \langle \dots, N_{k,\lambda} + 1, \dots | a_{k,\lambda}^\dagger | \dots, N_{k,\lambda}, \dots \rangle = \\
 & = -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega}} \langle n | \mathbf{j}_{-k} \cdot \boldsymbol{\lambda} | 0 \rangle \sqrt{N_{k,\lambda} + 1}.
 \end{aligned}$$

efeito quântico

Então no tratamento quântico as taxas de absorção e emissão diferem, a última sendo:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{n \rightarrow 0}^{(emis.)} &= \frac{\omega_{n0}}{2\pi\hbar c^3} \sum_{\lambda(k)} |\langle 0 | \mathbf{j}_k \cdot \boldsymbol{\lambda}^* | n \rangle|^2 (N_{k,\lambda(k)} + 1) = \quad (Q) \\
 &= \Gamma_{n \rightarrow 0}^{(emis.ind.)} + \Gamma_{n \rightarrow 0}^{(emis.esp.)}.
 \end{aligned}$$

emissão induzida

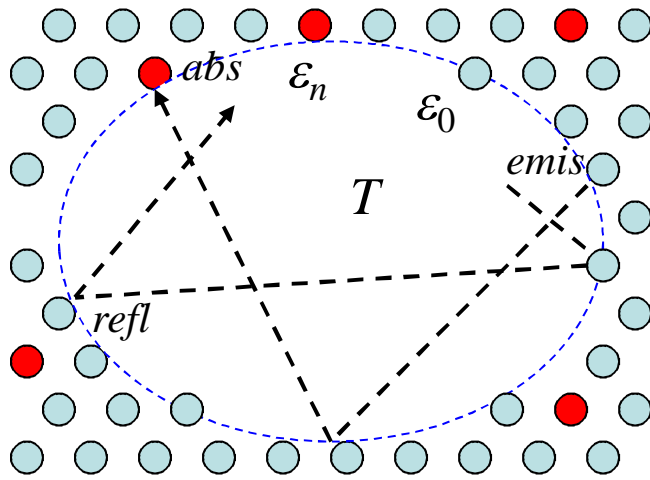


absorção

emissão espontânea,

devida as flutuações quânticas de vazio

## Equilíbrio termodinâmico entre luz e matéria, relações de Einstein



Probabilidade de ter o sistema de fótons dentro de cavidade no estado com energia  $E$ :

$$P(E) \sim e^{-E/k_B T}$$

Número médio das quantas de moda  $k$ :

$$\bar{N}_k = \sum_{N=0}^{\infty} N \frac{e^{-N\hbar ck / k_B T}}{\sum_{N=0}^{\infty} e^{-N\hbar ck / k_B T}} = \frac{1}{e^{\hbar ck / k_B T} - 1}$$

factor de normalização

distribuição de Bose-Einstein

Probabilidade de ter um átomo no estado com energia  $\varepsilon$ :  $p(\varepsilon) \sim e^{-\varepsilon/k_B T}$ .

Para um sistema de dois níveis:  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_n$ , temos as probabilidades normalizadas:

$$P_n = \frac{1}{e^{\varepsilon_{n0}/k_B T} + 1}, \quad P_0 = \frac{e^{\varepsilon_{n0}/k_B T}}{e^{\varepsilon_{n0}/k_B T} + 1}$$

$\varepsilon_{n0} = \varepsilon_n - \varepsilon_0$

para estado  $|n\rangle$                       para estado  $|0\rangle$

Logo a condição de balanço detalhado (Einstein, 1907) escreve-se como:

$$\underbrace{\left(\frac{dN}{dt}\right)_{abs}}_{BNp_0} = \underbrace{\left(\frac{dN}{dt}\right)_{emis.ind.}}_{BNp_n} + \underbrace{\left(\frac{dN}{dt}\right)_{emis.esp.}}_{Ap_n} \quad \text{esp. ind.}$$

onde os coeficientes de Einstein\*  $A$  e  $B$  correspondem respectivamente as probabilidades dos processos espontâneos e induzidos e, conforme a condição (128), estão relacionados como:

---

\* Introduzidos por Einstein na base fenomenológica, na época quando ainda não existiu mecânica quântica.

$$A = BN \frac{p_0 - p_n}{p_n} = B \frac{1}{e^{\hbar ck/k_B T} - 1} \left( e^{\varepsilon_{n0}/k_B T} - 1 \right) = B$$

relação de Einstein

e portanto a parte direita pode ler-se como  $\Gamma_{n \rightarrow 0}^{(emis)} = B(\bar{N}_k + 1)$ , em  
 concordância com o resultado quântica, Eq. (Q). ind. esp.



**Momentos multiplares de radiação: momento eléctrico dipolar, momento magnético dipolar, momento eléctrico quadruplar**

O principal elemento de matriz para o coeficiente de emissão espontânea  $B$  é:

$$\langle 0 | \mathbf{j}_k | n \rangle = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \langle 0 | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | n \rangle d\mathbf{r}$$

Os valores típicos das energias relevantes para este elemento são:  $\varepsilon_{n0} \approx \hbar ck \sim 1 \text{ eV}$ , e portanto  $k \sim 1 \text{ eV}/\hbar c \sim 10^5 \text{ cm}^{-1}$ , quando a extensão típica dos estados atómicos  $\psi_n$  e  $\psi_0$  é o raio de Bohr  $a_0 = \hbar^2/me^2 \approx 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ . Então o argumento de exponencial resulta muito pequeno  $kr \sim 10^{-3} \ll 1$  e faz sentido a sua expansão em serie:

$$\langle 0 | \mathbf{j}_k | n \rangle = \int d\mathbf{r} (1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots) \langle 0 | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | n \rangle$$

que dá origem aos chamados momentos multiplares de transição: momentos superiores

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{j}_0 | n \rangle &\equiv \langle 0n \rangle_{\text{e.d.}} & \langle 0 | (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) | n \rangle &= \frac{1}{2} \langle 0 | (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \mathbf{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})) | n \rangle + \\ &\text{momento eléctrico dipolar} & &\text{magnético dipolar, } \langle 0n \rangle_{\text{m.d.}} \\ & & &+ \frac{1}{2} \langle 0 | (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})) | n \rangle. \\ & & &\text{eléctrico quadruplar, } \langle 0n \rangle_{\text{e.q.}} \end{aligned}$$

Consideremos o termo mais importante para maioria dos casos práticos, o eléctrico dipolar. Usando a expressão para corrente total, obtemos o operador correspondente como:

$$\mathbf{j}_0 = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}_\alpha$$

Se termos conta que

$$\mathbf{p}_\alpha = (m/i\hbar)[\mathbf{r}_\alpha, H_{0,\text{mater.}}],$$

apresentando  $H_{0,\text{mater.}} = \sum_{\alpha} p_{\alpha}^2/2m + V$  e usando as relações de comutação  $[r_{\alpha}^j, p_{\alpha}^{j'}] = i\hbar\delta_{jj'}\delta_{\alpha\beta}$  (sendo  $j, j'$  os índices cartesianos) e  $[\mathbf{r}_\alpha, V] = 0$ , Eq. acima converte-se em:

$$\mathbf{j}_0 = \frac{e}{i\hbar} [\mathbf{R}, H_{0,\text{mater.}}] \quad \text{onde } \mathbf{R} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha,$$

assim que  $\langle 0n \rangle_{\text{e.d.}}$  torna-se em:

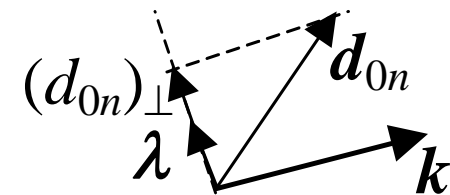
$$\langle 0n \rangle_{\text{e.d.}} = \langle 0 | \mathbf{j}_0 | n \rangle = \frac{e}{i\hbar} \langle 0 | \mathbf{R} H_{0,\text{mater.}} - H_{0,\text{mater.}} \mathbf{R} | n \rangle = -i\omega_{n0} \langle 0 | e\mathbf{R} | n \rangle$$

operador vector

Finalmente, introduzindo o operador de momento dipolar total  $\mathbf{d} = e\mathbf{R}$  e o seu elemento de matriz  $\mathbf{d}_{0n} = \langle 0|\mathbf{d}|n\rangle$ , chegamos a expressão para intensidade de emissão espontânea dipolar eléctrica (compare com o análogo clássico):

$$\frac{dP_\lambda}{d\Omega} = \frac{\omega_{n0}^4}{2\pi c^3} \left| \mathbf{d}_{n0} \cdot \boldsymbol{\lambda}^* \right|^2$$

De facto só a componente de  $\mathbf{d}_{0n}$  ao longo da polarização e portanto normal a  $\mathbf{k}$ :  $(\mathbf{d}_{0n})_\perp$ , contribui aqui.



Para o caso de estados 0 e  $n$  serem autoestados dos operadores de momento angular  $L^2$  e  $L_z$  usamos as relações gerais, para um operador vectorial  $\mathbf{R}$ :  $[L_\alpha, R_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} R_\gamma$ , e chegamos as regras de selectividade (cf. Cap. 2):

$$L' = L \pm 1, \quad M' = M, M \pm 1$$

Agora tornamos ao efeito de momento magnético dipolar. Verifica-se que a expressão antissimétrica  $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*) - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})$  pode ser apresentada como

$$(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\lambda}^*)\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{j}),$$

portanto a contribuição deste termo para  $\langle 0|\mathbf{j}_k|n\rangle$  resulta em forma:

$$\begin{aligned} \langle 0n\rangle_{\text{m.d.}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\lambda}^*)\cdot\int d\mathbf{r}\langle 0|\mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})|n\rangle & \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}\times\mathbf{p}_{\alpha} \\ &= \frac{e}{2m}(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\lambda}^*)\cdot\int d\mathbf{r}\langle 0|\mathbf{L}(\mathbf{r})|n\rangle & \mathbf{M} &= \frac{e}{2mc}\mathbf{L} \\ &= c(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\lambda}^*)\cdot\int d\mathbf{r}\langle 0|\mathbf{M}(\mathbf{r})|n\rangle = c(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\lambda}^*)\cdot\langle 0|\mathbf{M}|n\rangle. & & \text{momento magnético} \\ & & & \text{orbital} \end{aligned}$$

Comparando esta contribuição com a eléctrica dipolar, obtemos:

$$\frac{\langle 0n\rangle_{\text{m.d.}}}{\langle 0n\rangle_{\text{e.d.}}} \sim \frac{\hbar k / m}{\omega_{n0} a_0} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \text{constante de estrutura fina}$$

o que indica papel dominante das transições e.d. Só quando estas ficam excluídas por razões de simetria, as transições m.d. podem ser relevantes.

Por fim, considerando o momento eléctrico quadruplar, a expressão simétrica:  $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*) + (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})$  apresenta-se em  $kQ\lambda$ , onde

$$Q_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N \left( r_{\alpha}^i r_{\alpha}^j - \frac{r_{\alpha}^2}{3} \delta_{ij} \right) \quad \text{tensor de momento quadruplar}$$

A correspondente contribuição em elemento de matriz:

$$\langle 0n \rangle_{\text{e.q.}} = -\frac{\omega_{n0}}{2} \mathbf{k} \underbrace{\langle 0|Q|n \rangle}_{\sim a_0^2} \boldsymbol{\lambda}^*$$

resulta inferior de  $\langle 0n \rangle_{\text{e.d.}}$  em razão  $\sim a_0 k \sim 10^{-3}$  e, tanto como a contribuição m.d., só pode ser relevante em casos de ter proibida a principal contribuição e.d.

Absorção e emissão de luz pode produzir-se também pelos termos seguintes na serie das iterações, Eq. (I), que correspondem aos processos com varios fotões. Semelhante a os termos m.d. e e.q. com respeito ao e.d., estes termos são relevantes só em casos quando os de 1ª iteração não podem contribuir pelas certas razões de simetria.

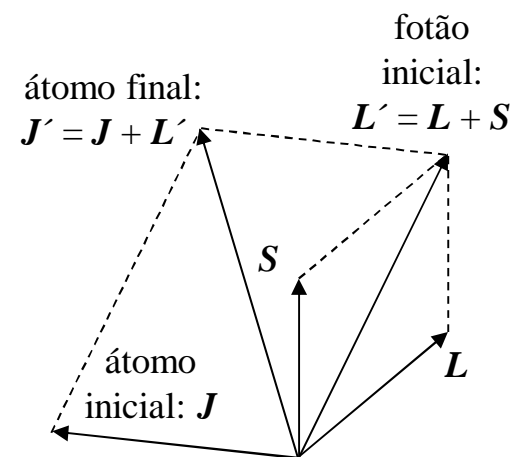
## Absorção multiplar e regras de selectividade

Desde ponto de vista de simetria rotacional, a expansão:

$$\langle 0 | \mathbf{j}_k | n \rangle \equiv \langle 0n \rangle_{e.d.} + \langle 0n \rangle_{m.d.} + \langle 0n \rangle_{e.q.} + \dots$$

corresponde à serie dos operadores tensoriais irreduzíveis, onde se aplica o teorema de Wigner-Eckart. Logo, a sua estrutura implica as regras de selectividade para cada processo. Fisicamente, estas correspondem à conservação de momento angular total (controlada pelos c.C.-G.) em sistema composto: átomo + fóton.

$$\begin{array}{ccc} \text{momento total} & + & \text{momento orbital } L \\ \mathbf{J} & & + \text{spin } S \end{array}$$




Aparte disso, também deve conservar-se a paridade total (controlada pelo elemento reduzido), o que requer as paridades atômicas inicial e final diferir por  $L + 1$ :  $(-1)^{J+J'} = (-1)^{L+1}$  (tendo em conta que o spin de fóton  $S = 1$ ).

Em particular, para  $\langle 0n \rangle_{\text{e.d.}}$  temos:

$$\left. \begin{array}{l} L' = 1, \quad L = 0, \\ J' = J, J \pm 1, \end{array} \right\} \text{ desde c.C.-G.}$$


proibido por  $(-1)^{J+J'} = -1$


$$J' = J \pm 1 .$$


Doutro lado, para  $\langle 0n \rangle_{\text{m.d.}}$ :

$$L' = L = 1,$$
$$J' = J, J \pm 1$$

proibido por  $(-1)^{J+J'} = 1$

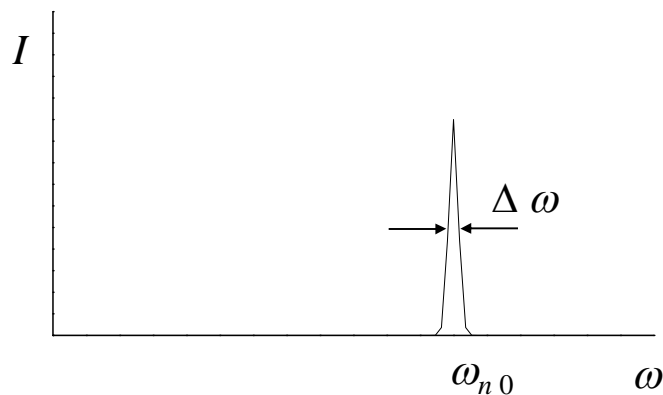

$$J' = J .$$

Por fim, para  $\langle 0n \rangle_{\text{e.q.}}$ :

$$L' = 2, \quad L = 1,$$

$$J' = J, J \pm 2.$$

## Largura natural de riscas

Emissão espontânea ou absorção da luz por uma definida transição atômica  $0 \rightarrow n$  está associada com a energia  $\varepsilon_{n0} = \hbar\omega_{n0}$  e corresponde ao pico da intensidade  $I(\omega)$ .



Segundo a regra de ouro, temos  $I(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_{n0})$ . Mas de facto cada processo tem certa *finita* duração temporal  $\tau$ , com o valor médio  $\langle \tau \rangle = 1/\Gamma_{0 \rightarrow n}$ . Conforme a relação de incerteza de Heisenberg, este valor está relacionado com a incerteza de energia de transição:

$$\Delta\varepsilon \sim \hbar/\langle \tau \rangle = \hbar\Gamma_{0 \rightarrow n}$$

(cf. também a figura na pag. 69). A ordem típica de taxa de emissão espontânea  $\Gamma \sim 10^9 \text{ s}^{-1}$  implica a largura natural das riscas  $\Delta\varepsilon_{nat} \sim 10^{-18} \text{ erg} \sim 10^{-6} \text{ eV}$ , o valor extremamente pequeno comparado com a mesma energia de transição  $\varepsilon_{n0} \sim 1 \text{ eV}$ .



## Difusão de luz no tratamento quântico

Interacção com matéria pode produzir, aparte da criação e aniquilação das quantas de luz, também as suas transições dum estado para outro:

$$k, \lambda \rightarrow k', \lambda',$$

o que corresponde a difusão de luz. Geralmente, este processo está acompanhado por variação de energia ( $k \neq k'$ ), implicando também uma transição entre estados de matéria:

$$0 \rightarrow n, \quad \varepsilon_{n0} = \hbar c(k - k').$$

Desde ponto de vista de 2ª quantificação, tal processo deve incluir 2 operadores de criação ( $a_{k',\lambda'}^+, b_n^+$ ) e 2 operadores de aniquilação ( $a_{k,\lambda}, b_0$ ). Estas combinações aparecem no termo  $\sim \int \rho(\mathbf{r}) A^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$  em  $H_{int}$ , ou na 2ª iteração de  $\int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$  em Eq. (I). No primeiro caso, temos o elemento de matriz relevante:

$$\langle n; N_{k,\lambda} - 1, N_{k',\lambda'} = 1 | \frac{e^2}{2mc^2} \int \rho(\mathbf{r}) A^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} | 0; N_{k,\lambda}, N_{k',\lambda'} = 0 \rangle =$$

factoriza-se em partes electrónica e fotónica

$$= \frac{e^2}{2mc^2} \int \langle n | \rho(\mathbf{r}) | 0 \rangle \langle N_{k,\lambda} - 1, N_{k',\lambda'} | \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) | N_{k,\lambda}, N_{k',\lambda'} - 1 \rangle d\mathbf{r}.$$

Logo o elemento fotónico descomponha-se numa soma segundo estados intermédios:

$$\langle f | \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} | i \rangle = \sum_m \langle f | \mathbf{A} | m \rangle \cdot \langle m | \mathbf{A} | i \rangle,$$

e conforme aos dois tipos dos termos relevantes em produto  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ :

$$\sim \lambda \cdot \lambda'^* (\hat{a}_{k,\lambda} \hat{a}_{k',\lambda'}^+ + \hat{a}_{k',\lambda'}^+ \hat{a}_{k,\lambda})$$

só dois estados intermédios importam:  $|m\rangle = |N_{k,\lambda}, N_{k',\lambda'} = 1\rangle$

e  $|m\rangle = |N_{k,\lambda} - 1, N_{k',\lambda'} = 0\rangle$ .

O elemento de matriz resultante destes dois processos é:

raio clássico de electrão  
(J.J. Thomson, 1897):  
 $r_0 \approx 2.8 \cdot 10^{-13}$  cm

$$\frac{e^2}{mc^2} \frac{2\pi\hbar c^2}{V} \sqrt{\frac{N_{k,\lambda}}{\omega\omega'}} \langle n | \int \rho(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} | 0 \rangle \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}'$$

e a taxa de difusão:

$$\Gamma_{0,k,\lambda \rightarrow n,k',\lambda'} = \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{2\pi\hbar c^2 r_0}{V} \right)^2 \frac{N_{k,\lambda}}{\omega\omega'} \times$$

$$\times \left| \langle n | \int \rho(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} | 0 \rangle \right|^2 (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}')^2 \delta(\varepsilon_{n0} + \hbar\omega - \hbar\omega').$$

Somando esta taxa em estados finais (com  $V^{-1}\sum_{\mathbf{k}'} \rightarrow \int d\mathbf{k}' = c^{-3} \int \omega'^2 d\omega' d\Omega'$ ),  
escrevemos a taxa diferencial de difusão (para  $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'$  dadas):

$$\frac{d\Gamma_{0 \rightarrow n}}{d\Omega'} = c N_{k,\lambda} \frac{\omega'}{\omega} |\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}'|^2 \left| \langle n | \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} | 0 \rangle \right|^2$$

Especificamos esta taxa para difusão de luz pelos electrões livres, cujos estados são caracterizados por impulsos:  $|0\rangle \equiv |\mathbf{q}_0\rangle$ ,  $|n\rangle \equiv |\mathbf{q}_n\rangle$ , assim que

$$\langle 0 | \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} | n \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_n).$$

Neste caso Eq. acima conduz à secção diferencial:

$$\frac{d\sigma_{0 \rightarrow n}}{d\Omega'} = r_0^2 \frac{\omega'}{\omega} |\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}'|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_n)$$

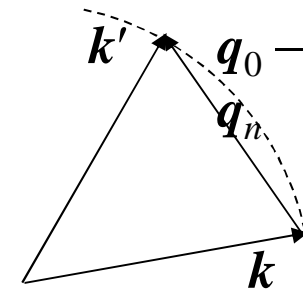
Somando em estados electrónicos finais, chegamos a lei clássica de Thomson:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = r_0^2 \frac{\omega'}{\omega} |\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}'|^2$$

Doutro lado, este processo pode considerar-se também como difusão dos electrões livres por luz (A.H. Compton, 1922). No limite dos electrões não relativistas, com velocidades  $\hbar q = v \ll c$ , temos a mudança do seu impulso:

$$\Delta q = |\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_n| \quad \square \quad \Delta k = |k - k'|,$$

que pode ser bastante forte.



Outro tipo de difusão, devido a 2ª iteração de  $H_{int}$ , tem o elemento de matriz:

$$-\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle n | \tilde{H}_{int}(t') \tilde{H}_{int}(t'') | 0 \rangle = \frac{e^{i\omega_n t}}{\omega_{n0} - i\eta} \sum_m \frac{\langle n | \tilde{H}_{int}(0) | m \rangle \langle m | \tilde{H}_{int}(0) | 0 \rangle}{\omega_{0m} - i\eta}$$

resultando em taxa de difusão:

$$\Gamma_{0 \rightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_m \frac{\langle n | \tilde{H}_{\text{int}}(0) | m \rangle \langle m | \tilde{H}_{\text{int}}(0) | 0 \rangle}{\varepsilon_0 - \varepsilon_m - i\eta} \right|^2 \delta(\varepsilon_0 - \varepsilon_n)$$

regra de ouro na 2ª ordem de teoria das pert. dep. de tempo

Para  $\tilde{H}_{\text{int}}(t) = c^{-1} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  temos 2 possibilidades dos números fotónicos no estado intermédio:

1) com  $N_{k,\lambda} - 1, N_{k',\lambda'} = 0,$

2) com  $N_{k,\lambda}, N_{k',\lambda'} = 1,$

mas, em diferença do processo da 1ª ordem, aqui no cada caso ainda pode existir um número grande dos estados electrónicos intermédios  $|m\rangle$ .

As contribuições respectivas à amplitude de difusão de 2ª ordem são:

$$1) \quad \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{2\pi\hbar c^2 \sqrt{N_{k,\lambda}}}{V\sqrt{\omega\omega'}} \sum_m \frac{\langle n | \mathbf{j}_{k'} \cdot \boldsymbol{\lambda}'^* | m \rangle \langle m | \mathbf{j}_{-k} \cdot \boldsymbol{\lambda} | 0 \rangle}{\hbar\omega + \varepsilon_{0m} - i\eta}$$

$$2) \quad \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{2\pi\hbar c^2 \sqrt{N_{k,\lambda}}}{V\sqrt{\omega\omega'}} \sum_m \frac{\langle n | \mathbf{j}_{-k} \cdot \boldsymbol{\lambda} | m \rangle \langle m | \mathbf{j}_{k'} \cdot \boldsymbol{\lambda}'^* | 0 \rangle}{\varepsilon_{0m} - \hbar\omega' - i\eta}$$

formulas de  
Kramers-  
Heisenberg

Para o caso dos electrões livres:

$$|0\rangle \equiv |\mathbf{q}_0\rangle, \quad |n\rangle \equiv |\mathbf{q}_n\rangle, \quad |m\rangle \equiv |\mathbf{q}_m\rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_m | \mathbf{j}_{-k} \cdot \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{q}_0 \rangle &= (e\hbar/2m) (\mathbf{q}_m + \mathbf{q}_0) \cdot \boldsymbol{\lambda} \delta(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k} - \mathbf{q}_m) = \\ &= (e\hbar/m) \mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\lambda} \delta(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k} - \mathbf{q}_m), \end{aligned}$$

(k · λ = 0)

temos a amplitude de difusão:

$$r_0 \frac{2\pi\hbar c^2 \sqrt{N_{k,\lambda}}}{V \sqrt{\omega\omega'}} \left[ \frac{\hbar^2 (\mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{q}_m \cdot \boldsymbol{\lambda}'^*) / m}{\hbar\omega + \varepsilon_{q_0} - \varepsilon_{q_0+k} - i\eta} + \frac{\hbar^2 (\mathbf{q}_m \cdot \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\lambda}'^*) / m}{\varepsilon_{q_0} - \varepsilon_{q_0-k'} - \hbar\omega' - i\eta} \right]$$

Comparando esta expressão com a de Thompson, concluímos que o factor adicional estima-se como:

$$\sim \frac{\hbar^2 q^2 / m}{\hbar ck} \sim \frac{v}{c} \ll 1,$$

portanto, para difusão de luz pelos electrões livres não relativistas, os processos de 2ª ordem são desprezáveis ao lado dos de 1ª ordem.



## Difusão de Raman

Contudo os processos de 2ª ordem podem ser relevantes para difusão de luz por um sistema atómico com excitação dos níveis internos de energia (sem conservação de momento). Tal processo foi investigado primeiro pelo C.V. Raman (1928) e chama-se então a difusão de Raman.

Neste caso, a amplitude dipolar pode ser apresentada em forma:

$$\frac{2\pi e^2 \sqrt{N_{k,\lambda}}}{imV \sqrt{\omega\omega'}} \sum_m \left[ \varepsilon_{0m} \frac{\langle n | \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}'^* | m \rangle \langle m | \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda} | 0 \rangle}{\varepsilon_{0m} + \hbar\omega - i\eta} - \varepsilon_{nm} \frac{\langle n | \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda} | m \rangle \langle m | \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}'^* | 0 \rangle}{\varepsilon_{0m} - \hbar\omega' - i\eta} \right]$$

$\underbrace{\varepsilon_{0m} - \hbar\omega' - i\eta}_{= \varepsilon_{nm} - \hbar\omega}$

que torna-se, com uso da relação  $\mathbf{P}/m = [\mathbf{R}, H_0]/(i\hbar)$ :

$$\frac{2\pi e^2 \sqrt{N_{k,\lambda}}}{V \sqrt{\omega\omega'}} \left\{ -\frac{\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}'^*}{m} \langle n | \rho_0 | 0 \rangle + \right.$$

este termo cancela-se com o seu  
parceiro resultante de  $\rho A^2$

$$\left. + \omega\omega' \sum_m \left[ \frac{\langle n | \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda}'^* | m \rangle \langle m | \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda} | 0 \rangle}{\varepsilon_{0m} + \hbar\omega - i\eta} + \frac{\langle n | \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda} | m \rangle \langle m | \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\lambda}'^* | 0 \rangle}{\varepsilon_{0m} - \hbar\omega' - i\eta} \right] \right\}.$$

a contribuição de 2ª ordem  
para difusão de Raman

A troca de energia da luz neste processo:

$$\omega' - \omega = \varepsilon_{n0}/\hbar,$$

pode ter tanto valor positivo (corresponde ao chamado processo de Stokes) como negativo (anti-Stokes), o último devido às excitações térmicas presentes no sistema atômico e portanto sendo habitualmente de menor intensidade.

Uma específica importante de difusão de Raman resulta directamente da sua origem nos processos de 2ª ordem. Desde o facto que os elementos de matriz  $\langle m|\mathbf{R}|n\rangle$  diferem de zero só para  $|m\rangle$  e  $|n\rangle$  com paridades opostas, no produto  $\langle n|\mathbf{R}|m\rangle\langle m|\mathbf{R}|0\rangle$  as paridades de  $|n\rangle$  e  $|0\rangle$  devem ser iguais. Portanto, as transições de Raman são complementarias às de absorção (dipolar eléctrica).


Para secção diferencial de difusão de Raman nas frequências baixas,  $\hbar\omega < \varepsilon_{0m}$ , temos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = a_0^2 \left( \frac{\omega a_0}{c} \right)^4 |\lambda'^* \hat{M} \lambda|^2 = r_0^2 \left( \frac{\hbar\omega}{Ry} \right)^4 |\lambda'^* \hat{M} \lambda|^2$$

(um Rydberg,  $Ry = \hbar^2/ma_0^2 \approx 27.2$  eV), em correspondência com a clássica difusão de Rayleigh  $\sim \omega^4$ , que define a cor azul do céu.

## Estados quânticos de radiação: $|n\rangle$ , $|\varphi\rangle$ e estados coerentes

Estados próprios dos operadores  $\hat{n}_{k,\lambda}$  correspondem no limite clássico aos valores definidos de módulo de potencial vector,  $|A_{k,\lambda}|$ , deixando arbitrária a sua fase:


$$|A_{k,\lambda}|e^{i(k\cdot r - \omega t)}e^{i\varphi}.$$

Esta arbitrariedade é semelhante a relação entre coordenada  $\mathbf{r}$  e impulso  $\mathbf{p}$  duma partícula, os estados  $|\mathbf{p}\rangle$  sendo alternativos para  $|\mathbf{r}\rangle$ . Mas qual é a classificação alternativa para estados  $|\hat{n}_{k,\lambda}\rangle$  de radiação?

Definimos os operadores relacionados a fase  $\varphi$  (para uma moda definida,  $\hat{n}_{k,\lambda} \equiv \hat{n}$ ) através das relações:

$$\hat{a} = (\hat{n} + 1)^{1/2} \exp(i\hat{\varphi}), \quad \text{classicamente: } a = |a|e^{i\varphi}$$
$$\hat{a}^+ = \exp(-i\hat{\varphi})(\hat{n} + 1)^{1/2}.$$

Desde relações canónicas para operadores  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  podemos definir a acção dos operadores  $\exp(\pm i \hat{\phi})$  sobre estados  $|n\rangle$ :

$$\exp(i\hat{\phi})|n\rangle = (\hat{n}+1)^{-1/2} \hat{a}|n\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

$$\exp(-i\hat{\phi})|n\rangle = \hat{a}^\dagger (\hat{n}+1)^{-1/2} |n\rangle = |n+1\rangle.$$

o que pode ser também representado na forma matricial:

$$\exp(i\hat{\phi}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \exp(-i\hat{\phi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Os operadores unitários  $\exp(i\hat{\phi})$  e  $\exp(-i\hat{\phi})$  têm analogia com  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  (aparte da sua normalização), logo podem construir-se também os operadores Hermiteanos:

$$\cos \hat{\phi} = \frac{1}{2} [\exp(i\hat{\phi}) + \exp(-i\hat{\phi})] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\text{sen} \hat{\phi} = \frac{1}{2i} [\exp(i\hat{\phi}) - \exp(-i\hat{\phi})] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

que, em analogia com  $r$  e  $p$ , correspondem aos valores observáveis do campo e.m. Uma propriedade específica destes dois operadores consiste em facto que eles *não* comutam:\*

$$[\cos \hat{\phi}, \text{sen} \hat{\phi}] = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \neq 0$$

---

\* Isso obriga considera-los independentes, não as duas funções de um operador  $\hat{\phi}$ . Rigorosamente dito, tal operador único não pode ser definido.

e portanto não são medíveis simultaneamente. Também eles não comutam com  $\hat{n}$  :

$$[\hat{n}, \cos \hat{\varphi}] = -i \sin \hat{\varphi}, \quad [\hat{n}, \sin \hat{\varphi}] = i \cos \hat{\varphi}$$

produzindo as relações de incerteza:

$$\Delta n \Delta \cos \varphi \geq \frac{1}{2} |\langle \sin \hat{\varphi} \rangle|, \quad \Delta n \Delta \sin \varphi \geq \frac{1}{2} |\langle \cos \hat{\varphi} \rangle|$$

Em visto da dualidade dos operadores de fase,  $\cos \hat{\varphi}$  e  $\sin \hat{\varphi}$ , surge a questão: se existem em princípio alguns estados  $|\varphi\rangle$  com a fase definida? A resposta positiva torna-se possível graças ao facto que o comutador  $[\cos \hat{\varphi}, \sin \hat{\varphi}]$  actua sobre um só estado,  $|0\rangle$ , de base infinita dos estados  $|n\rangle$  de número definido.

Respectivamente, o estado  $|\varphi\rangle$  está construído através de certo específico processo de limite:

$$|\varphi\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^N e^{in\varphi} |n\rangle$$

De imediato verifica-se a sua normalização:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N 1 = 1$$

Desde a sua definição, temos a acção de  $\exp(i\hat{\varphi})$  sobre este estado:

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\varphi})|\varphi\rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^N e^{in\varphi} |n-1\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varphi} |n\rangle = \\ &= e^{i\varphi} |\varphi\rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{i(N+1)\varphi}}{\sqrt{N+1}} |N\rangle = e^{i\varphi} |\varphi\rangle. \end{aligned}$$



De maneira semelhante, verificamos que  $\exp(-i\hat{\phi})|\varphi\rangle = e^{-i\varphi}|\varphi\rangle$ . Logo, construindo simbolicamente uma função arbitrária  $F(\hat{\phi})$ , através da correspondente “serie de Fourier”, concluimos que os seus elementos de matriz são:

$$\langle\varphi|F(\hat{\phi})|\varphi'\rangle = F(\varphi)\delta_{\varphi\varphi'}$$

É então neste sentido que os estados  $|\varphi\rangle$  podem considerar-se os de fase definida ou “autoestados de  $\hat{\phi}$ ”.

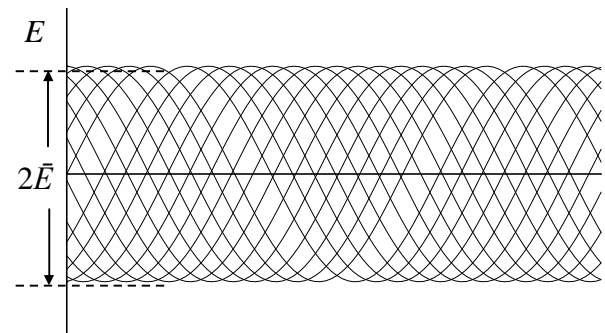
As incertezas de número e de fase dos fótons num estado  $|n\rangle$  são:

$$\Delta n = \sqrt{\langle n|\hat{n}^2|n\rangle - (\langle n|\hat{n}|n\rangle)^2} = 0,$$

$$\Delta \cos \varphi = \sqrt{\langle n|(\cos \hat{\phi})^2|n\rangle - (\langle n|\cos \hat{\phi}|n\rangle)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

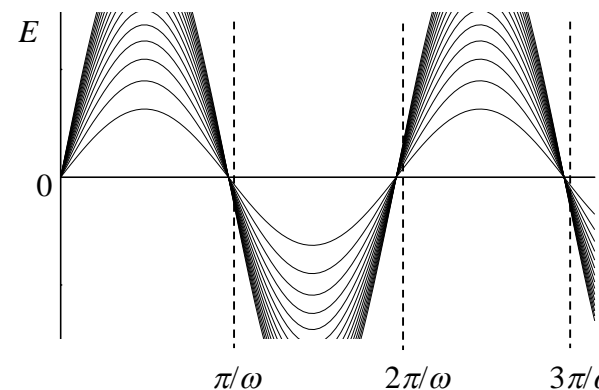
Daqui resulta que no cada estado  $|n\rangle$  está completamente definido o valor médio de amplitude de campo:

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{V}(n+1)}$$



mas a sua fase fica completamente indefinida.

Em contrário, para estado  $|\varphi\rangle$  temos a fase  $\varphi$  completamente definida, mas a amplitude  $E$  completamente indefinida. Isso corresponde a incerteza de número dos fotões:



$$\Delta n = \sqrt{\langle\varphi|\hat{n}^2|\varphi\rangle - (\langle\varphi|\hat{n}|\varphi\rangle)^2} = \sqrt{\lim_{N\rightarrow\infty} \frac{N(2N+1)}{6} - \left(\lim_{N\rightarrow\infty} \frac{N}{2}\right)^2} = \lim_{N\rightarrow\infty} \frac{N}{2\sqrt{3}} \quad \text{divergente!}$$

Contudo, a incerteza relativa fica finita:

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N/2\sqrt{3}}{N/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Comparando esta situação com o caso dos estados  $|x\rangle$  e  $|p\rangle$  dum oscilador harmónico, podemos perguntar, se existe aqui uma combinação parecida ao estado coerente de oscilador:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

(onde o número complexo  $\alpha = x\sqrt{m\omega/2\hbar} + ip/\sqrt{2m\hbar\omega}$  para oscilador),

que leva o produto das incertezas ao mínimo teórico:  $\Delta p \Delta x \approx 2\pi\hbar$ ?  
 Resulta que para radiação valem as mesmas combinações formais com  $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ . Assim construídos estados  $|\alpha\rangle$  são normalizados:  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ , mas não ortogonais:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left[-\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta\right)/2\right] \neq 0$$

No entanto, o módulo deste produto:  $|\langle \alpha | \beta \rangle| = e^{-|\alpha - \beta|^2/2}$ , tende a zero quando os números afastam-se:  $|\alpha - \beta| \rightarrow \infty$ . É fácil verificar que estados  $|\alpha\rangle$  são autoestados de operador  $\hat{a}$  com autovalor  $\alpha$ :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

isto pode considerar-se a  
definição do estado coerente

mas *não* de  $\hat{a}^+$  (falta o termo  $\exp(-|\alpha|^2/2)|0\rangle$  em  $|\alpha\rangle$ ). Outra representação de estado  $|\alpha\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = \exp(\underbrace{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}) |0\rangle$$

permite considerar este operador exponencial como operador de criação do estado coerente.

Verificam-se as relações para números dos fótons nos estados coerentes  $|\alpha\rangle$ :

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

$$\overline{n^2} = \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2,$$

e portanto  $\Delta n = |\alpha|$ ,  $\Delta n / \bar{n} = 1/|\alpha|$  .

Doutro lado, para as fases temos:

$$\langle \alpha | \cos \hat{\phi} | \alpha \rangle = |\alpha| \cos \theta e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n! \sqrt{n+1}} \Big|_{|\alpha| \gg 1} \approx \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{8|\alpha|^2} + \dots \right)$$

$$\langle \alpha | (\cos \hat{\phi})^2 | \alpha \rangle \Big|_{|\alpha| \gg 1} \approx \cos^2 \theta - \frac{\cos^2 \theta - 1/2}{2|\alpha|^2} + \dots$$

Daqui resulta:

$$\Delta \cos \varphi = \sqrt{\langle \alpha | (\cos \hat{\varphi})^2 | \alpha \rangle - (\langle \alpha | \cos \hat{\varphi} | \alpha \rangle)^2} \underset{|\alpha| \gg 1}{\approx} \frac{\text{sen } \theta}{2|\alpha|}$$

e chegamos a relação de incerteza:

$$\Delta n \Delta \cos \varphi \approx \frac{1}{2} |\text{sen } \theta|$$

em concordância com o comutador dos respectivos operadores. De mesma maneira obtemos:

$$\langle \alpha | \text{sen } \hat{\varphi} | \alpha \rangle \underset{|\alpha| \gg 1}{\approx} \text{sen } \theta \left( 1 - \frac{1}{8|\alpha|^2} + \dots \right)$$

$$\langle \alpha | (\text{sen } \hat{\varphi})^2 | \alpha \rangle \underset{|\alpha| \gg 1}{\approx} \text{sen}^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta - 1/2}{2|\alpha|^2} + \dots$$

$$\Delta \text{sen } \varphi \underset{|\alpha| \gg 1}{\approx} \frac{\cos \theta}{2|\alpha|}$$

Portanto os estados  $|\alpha\rangle$  de facto realizam o limite inferior de produto das incertezas previsto pelas relações de comutação. No limite  $\bar{n} \rightarrow \infty$  eles realizam a onda clássica.

