Folha 9

Estados de fase e os estados coeréntes do campo electromagnético

1. O estado de fase está definido na forma assintótica:

$$|\varphi\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in\varphi} |n\rangle$$

onde $|n\rangle$ é o autoestado de número dos fotões: $\hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$.
a) Mostre que estado $|\varphi\rangle$ é autoestado do operador

$$\cos\hat{\varphi} = \frac{\left(\hat{N}+1\right)^{-1/2} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \left(\hat{N}+1\right)^{-1/2}}{2}$$

com autovalor $\cos\varphi$.
b) Verifique as propriedades

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\,\hat{N}\,|\varphi\rangle &= \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2}, \qquad \langle\varphi|\,\hat{N}^2\,|\varphi\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{N(2N+1)}{6}, \\ \left.\frac{\Delta N}{\langle N\rangle}\right|_{\varphi} &= \frac{\sqrt{\langle N^2\rangle_\varphi - \langle N\rangle_\varphi^2}}{\langle N\rangle_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. Seja o estado coerente $|\alpha\rangle$ definido como o autoestado do operador de aniquilação de fotão $\hat{a}$ : $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, com o autovalor $\alpha = |\alpha|\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
a) Mostre que esta condição está satisfeita pela construcção

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

b) Verifique as igualdades

$$\langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger\,|\alpha\rangle = \alpha^*, \qquad \langle N\rangle_\alpha = \langle\alpha|\,\hat{N}\,|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \qquad \left\langle N^2\right\rangle_\alpha = \langle\alpha|\,\hat{N}^2\,|\alpha\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$$

e a incerteza relativa do número dos fotões no estado $|\alpha\rangle$

$$\left.\frac{\Delta N}{\langle N\rangle}\right|_{\alpha} = \frac{\sqrt{\langle N^2\rangle_\alpha - \langle N\rangle_\alpha^2}}{\langle N\rangle_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\langle N\rangle_\alpha}}.$$

3. Aplique a construcção anterior dos estados coerentes $|\alpha\rangle$ para um oscilador harmónico unidimensional:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right).$$

a) Mostre que

$$\langle\alpha|\,\hat{x}\,|\alpha\rangle = \mathrm{Re}\alpha\sqrt{2\hbar/m\omega}, \qquad \langle\alpha|\,\hat{p}\,|\alpha\rangle = \mathrm{Im}\alpha\sqrt{2\hbar m\omega}, \qquad \Delta x\Delta p\big|_{\alpha} = \hbar/2$$

b) Compare o resultado anterior com o para o estado $|n\rangle$: $\Delta x\Delta p\big|_{n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar$.