Folha 7
Campo electromagnético e a sua interacção com matéria

1. Considere a lei de dispersão para o campo electromagnético.
Aplicando a equação de onda para potencial vector

$$\Box \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

com operador de D'Alembert $\Box = \nabla^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2$ a expansão de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ em ondas planas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k})} \left[A_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k})} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + A^*_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k})} \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right],$$

derive a relação de dispersão entre frequência ω e vector de onda $\mathbf{k}$.

2. Da expansão anterior e as equações de Maxwell mostre as formulas para densidade de energia

$$\varepsilon = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k})} k^2 \left| A_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k})} \right|^2,$$

e para vector de Poynting

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = c\varepsilon \frac{\mathbf{k}}{k}.$$

3. Considere a probabilidade de transição $0 \to n$ na primeira ordem da teoria de perturbação dependente de tempo $H_{int}(t) = H_{int}(0)\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Mostre a formula de regra de ouro de Fermi para esta probabilidade em unidade de tempo no limite $\omega_{0n} t \gg 1$.