Folha 3

Momento angular

1. Reconsidere o sistema de dois electrões descrito no problema 4 de folha 2.

a) Calcule na 1^{a} ordem de teoria de perturbações com respeito a interacção de Coulomb a diferença de energia entre os estados com alinhamento paralelo e antiparalelo dos spins, resultantes de desdobramento do 2^{o} nível não perturbado ("energia de troca").

b) Verifique que o termo de troca (de origem coulombiana) pode ser formalmente ser escrito como derivando de uma interacção entre os spins dos 2 electrões

$$H_{int} = -J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

com $J > 0$.

2. a) Mostre que a densidade de spin $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ para partículas de spin $\frac{1}{2}$ é dada, em termos dos operadores de campo, por

$$\begin{aligned}
S_z(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar}{2}\left[\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r})\,\psi_\uparrow(\mathbf{r}) - \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r})\,\psi_\downarrow(\mathbf{r})\right], \\
S_x(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar}{2}\left[\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r})\,\psi_\downarrow(\mathbf{r}) + \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r})\,\psi_\uparrow(\mathbf{r})\right], \\
S_y(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar}{2}\left[\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r})\,\psi_\downarrow(\mathbf{r}) - \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r})\,\psi_\uparrow(\mathbf{r})\right].
\end{aligned}$$

b) Calcule $[\rho(\mathbf{r}), S_z(\mathbf{r})]$.

3. As funções de onda seguintes correspondem ao átomo de hidrogénio

(a) $\psi_{n,l,m,s} = \psi_{3,2,2,\frac{1}{2}}$(autofunção de H, L^2, L_z, S_z)

(b) $\psi_{n,l,m,s} = \psi_{3,2,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}$(autofunção de H, L^2, J^2, J_z)

Para cada autofunção calcule $\langle S_z\rangle, \langle S_x\rangle, \langle \mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\rangle, \langle J^2\rangle, \langle J_z\rangle$.

4. Calculando o desdobramento dos níveis de energia atómicos no campo magnético fraco (efeito de Zeeman) é necessário avaliar os elementos de matriz do operador $L_z + 2S_z$ entre os autoestados de H_0, J^2, e J_z. Calcule estes elementos para os orbitais 2p.

5. Uma partícula de spin $\frac{3}{2}$, sendo em repouso no referencial do laboratório, desintegra-se em duas partículas, uma de spin $\frac{1}{2}$ e outra de spin 0.

(a) Que valores são possíveis para o momento angular relativo das duas partículas? Mostre que existe só único valor possivel se está fixa a paridade do estado orbital relativo.

(b) Assume que a partícula desintegrada encontrava-se inicialmente no autoestado de S_z com o autovalor $m\hbar$. Será possivel determinar a paridade do estado final medindo as probabilidades de encontrar a partícula de spin $\frac{1}{2}$ nos estados $|\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$?

6. Para uma partícula simples que se move no espaço mostre que a função de onda $\psi_{l,m}(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 - 2z^2$ representa o autoestado simultáneo de L^2 e L_z com os autovalores $l(l+1)\hbar^2$ e $m\hbar$. Determine l e m. Encontre a função com o mesmo autovalor de L^2 e o autovalor máximo possivel de L_z.

7. Um sistema tem a função de onda $\psi(\mathbf{r}) = N(x + y + z)\,\mathrm{e}^{-r^2/a^2}$, com a real. Se estão medidos L_z e L^2, que probabilidades de encontrar os seus valores 0 e $2\hbar^2$?