Folha 11

Funções de Green em mecânica quântica

1. Calcule a função de Green da equação de Schroedinger dependente de tempo para uma partícula livre:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\mathcal{G}(\mathbf{r},t)=\delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

a) Considere o sistema tridimensional: $\mathbf{r}=(x,y,z)$. Compare o resultado com a solução fundamental do problema clássico de difusão:

$$\frac{\exp(-r^2/4Dt)}{(4\pi Dt)^{3/2}}.$$

Qual combinação dos parâmetros quânticos pode ser comparada com o coeficiente de difusão clássico D?

Qual significado físico pode ser atribuido ao tal coeficiente de difusão quântico? Qual o seu valor numérico para um electrão livre?

E para um neutrão livre?

b) Reconsidere este cálculo para o sistema bidimensional: $\mathbf{r}=(x,y)$. Compare com o resultado anterior.

2. Mostre que a função de Green da equação de Schroedinger estacionaria para um oscilador harmónico unidimensional:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\mathcal{G}(x-x')=\delta(x-x'),$$

obteve a forma:

$$\mathcal{G}(x-x')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_n^*(x)\psi_n(x')}{\epsilon_n-\epsilon},$$

onde $\psi_n(x)$ é a autofunção do Hamiltoniano com energia $\epsilon_n=\hbar\omega(n+1/2)$.

(Sugestão: use a propriedade de completicidade do sistema das autofunções dum operador Hermiteano: $\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(x)\psi_n(x')=\delta(x-x')$.)

3. Considere o cálculo assintótico da função de Green para equação de Klein-Gordon:

$$\left[\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\right)+m^2c^4\right]\mathcal{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t').$$

a) Para o intervalo pseudotemporal: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2-c^2(t-t')^2<0$. Comente o uso do método do ponto de sela para integração no plano do impulso complexo.

b) Para o intervalo pseudoespacial: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2-c^2(t-t')^2>0$. Qual é diferença na integração comparando com o caso anterior?