Folha 10

Equação de Klein-Gordon

1. Mostre que no limite não relativista a equação de Klein-Gordon para a partícula livre torna-se a equação de Schrödinger.

2. A função Lorentz invariante de degrau $\theta(p) \equiv \theta(p_0)$ está definida como

$$\theta(p) = \begin{cases} 1 & , \quad p_0 > 0, \\ 0 & , \quad p_0 < 0. \end{cases}$$

A sua invariância de Lorentz motiva-se por só distingir entre o passado e o futuro, sendo o conceito Lorentz invariante. Mostre explicitamente que a função de degrau é Lorentz invariante.

(Sugestão: só considere o 4-vector p pseudotemporal.)

3. Use as soluções explicitas de onda plana, $\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\pm Et)/\hbar}$, para establecer as relações de normalização e ortogonalidade seguintes:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}\psi_{\mathbf{p}'}^{(\pm)*}(\mathbf{r},t) i \overleftrightarrow{\partial_t} \psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(\mathbf{r},t) &= \pm\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \\ \int d\mathbf{r}\psi_{\mathbf{p}'}^{(\pm)*}(\mathbf{r},t) i \overleftrightarrow{\partial_t} \psi_{\mathbf{p}}^{(\mp)}(\mathbf{r},t) &= 0. \end{aligned}$$

onde a derivada bilateral $\overleftrightarrow{\partial_\mu}$ se define como: $f_1^* \overleftrightarrow{\partial_\mu} f_2 = f_1^* \left(\partial_\mu f_2\right) - \left(\partial_\mu f_1^*\right) f_2$.

5. Mostre que a condição

$$Q = \int d\mathbf{r}dt\psi^*(\mathbf{r},t) i \overleftrightarrow{\partial_t} \psi(\mathbf{r},t) < 0$$

está satisfeita pela solução $\psi^{(-)}(\mathbf{r},t)$ da equação de Klein-Gordon, sendo a superposição das soluções de onda plana de energia negativa.

6. Mostre que

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\psi^*(\mathbf{r},t) \overleftrightarrow{\partial_t} \psi(\mathbf{r},t)$$

se reduz à própria expressão não relativista no limite $E \to mc^2$.

7. As soluções de duas componentes de energia positiva e negativa da equação de Klein-Gordon na forma de Schrödinger são definidas como

$$\chi^{(\pm)}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\pm Et)/\hbar} = \frac{1}{2\sqrt{mc^2 E}} \begin{pmatrix} mc^2 \pm E \\ mc^2 \mp E \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\pm Et)/\hbar}$$

.

Mostre que elas são ortonormalizadas.

8. Mostre que no limite não relativista

$$\chi^{(-)}(\vec{p}) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Pela completicidade, qualquer pacote de onda pode ser expandido numa combinação linear das soluções da energia positiva e negativa:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[a_{\mathbf{p}}^{(+)}(t)\chi^{(+)}(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{p}}^{(-)}(t)\chi^{(-)}(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \right]$$

onde os spinors $\chi^{(\pm)}(\mathbf{p})$ são definidos como

$$\chi^{(\pm)}(\mathbf{p})e^{\mp iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{2\sqrt{mE}} \begin{pmatrix} m \pm E \\ m \mp E \end{pmatrix} e^{\mp iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

e $a_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t) = e^{\mp iEt} f^{(\pm)}(p)$, onde $f^{(\pm)}(p)$ são certas funções escalares.

a. Derive a condição de normalização para ter $\langle\phi|\phi\rangle = \pm 1$.

b. Inverte a expansão anterior e obtenha as expressões para $a_{\mathbf{p}}^{(+)}(t)$ and $a_{\mathbf{p}}^{(-)}(t)$.

Equação de Dirac

1.Suponha que as funções de onda de Dirac são normalizadas de mesmo modo que as de Klein-Gordon:

$$i\int d\mathbf{r}\overline{\psi}_\alpha(\mathbf{r},t) \overleftrightarrow{\partial}_t \psi_\beta(\mathbf{r},t) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Use a equação de Dirac para mostrar que estas funções de onda só diferem das funções normalizadas através de

$$\int d\mathbf{r}\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r},t)\psi_\beta(\mathbf{r},t) = \delta_{\alpha\beta}$$

pelo factor de $\sqrt{2mc^2}$.

2. Mostre que a densidade da corrente para a função de onda da partícula livre acorda com a corespondente expressão não relativista no limite próprio.

3. Re-derive a conservação da corrente usando a forma invariante de Lorentz da equação de Dirac.

4. Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1} = \beta\mathcal{L}\beta$$

para uma transformação de Lorentz, onde $\mathcal{L}$ é uma matriz 4×4 que depende dos parâmetros da transformação de Lorentz e actua sobre as quatro componentes do vector coluna das funções de onda que satisfazem a equação de Dirac.

5. Suponha que $\psi(x)$ é uma função de onda de Dirac no referencial $\mathcal{O}$.

a. Qual é a função de onda $\psi'(x')$ no referencial $\mathcal{O}'$ obtido de $\mathcal{O}$ pela rotação a volta do eixo x por $60°$?

b. Se uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ no repouso tem o seu spin na direcção z, qual a probabilidade que este spin será observado na direcção $60°$ do eixo z.

c. Considere a transformação de Lorentz para o referencial que se move na direcção $+z$ com velocidade v. Obtenha a matriz de transformação $\mathcal{L}$.

d. Use ose resultados da alinha (c) para obter a função de onda duma partícula de spin $\frac{1}{2}$ com spin na direcção $+z$ e velocidade v na direcção $-z$. Assume que a função de onda no referencial de repouso $u = (1, 0, 0, 0)$ e aplique a transformação de Lorentz de tipo de alinha (c).

e. Obtenha a matriz de transformação de Lorentz para o movimento da alinha (c) seguido pela rotação da alinha (a).

f. Neste novo referencial, onde a partícula tem a helicidade negativa e a velocidade dirigida a $60°$ de eixo z, calcule a probabilidade de observar o seu spin na nova direcção $+z$.

6. Mostre que no limite de alta energia $E/m \gg 1$ (equivalente ao de massa nula) os spinors de Dirac para helicidade positiva (de mão direita) e negativa (de mão esquerda) dos estados de impulso $\mathbf{p}$ são

$$u_{\pm}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi_{\pm\mathbf{p}} \\ \pm\chi_{\pm\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

onde $\chi_{\pm\mathbf{p}}$ são spinors tais que

$$\sigma \cdot \mathbf{p}\chi_{\pm\mathbf{p}} = \pm\chi_{\pm\mathbf{p}}.$$

(Sugestão: para actuar jeitosamente com as partículas sem massa deve usar a normalização $u^{\dagger}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = 1$. Mostre que os spinors de Dirac apropriados encontram-se multiplicando as formas habituais pelo factor $\sqrt{mc^2/E}$.)

7. Mostre que

$$P_L u_-(\mathbf{p}) = u_-(\mathbf{p}), \quad P_R u_+(\mathbf{p}) = u_+(\mathbf{p}), \quad P_L u_+(\mathbf{p}) = P_R u_-(\mathbf{p}) = 0$$

assim que o operador de quiralidade é equivalente ao operador de helicidade neste limite.

8. Se ψ_1 e ψ_2 são duas soluções arbitrarias da equação de Dirac livre, prove a descomposição de Gordon

$$c\overline{\psi}_2\widehat{\alpha}^{\mu}\psi_1 = \frac{1}{2m}\left[\overline{\psi}_2\widehat{p}^{\mu}\psi_1 - \left(\widehat{p}^{\mu}\overline{\psi}_2\right)\psi_1\right] - \frac{i}{2m}\hat{p}_{\nu}(\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1)$$

a que expressa a corrente de Dirac em soma da corrente convectiva semelhante a não relativista e da corrente interna (de spin).

Funções de Green em mecânica quântica

1. Calcule a função de Green da equação de Schroedinger dependente de tempo para uma partícula livre:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\mathcal{G}\left(\mathbf{r},t\right)=\delta\left(\mathbf{r}\right)\delta\left(t\right).$$

a) Considere o sistema tridimensional: $\mathbf{r}=(x,y,z)$. Compare o resultado com a solução fundamental do problema clássico de difusão:

$$\frac{\exp\left(-r^2/4Dt\right)}{\left(4\pi Dt\right)^{3/2}}.$$

Qual combinação dos parâmetros quânticos pode ser comparada com o coeficiente de difusão clássico D?

Qual significado físico pode ser atribuido ao tal "coeficiente de difusão" quântico?

Qual o seu valor numérico para um electrão livre?

E para um neutrão livre?

b) Reconsidere este cálculo para o sistema bidimensional: $\mathbf{r}=(x,y)$. Compare com o resultado anterior.

2. Mostre que a função de Green da equação de Schroedinger estacionaria para um oscilador harmónico unidimensional:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\mathcal{G}\left(x-x'\right)=\delta\left(x-x'\right),$$

obteve a forma:

$$\mathcal{G}\left(x-x'\right)=\frac{1}{\hbar\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_n^*\left(x\right)\psi_n\left(x'\right)}{n+1/2},$$

onde $\psi_n\left(x\right)$ é a autofunção do Hamiltoniano com energia $\varepsilon_n=\hbar\omega\left(n+1/2\right)$. (Sugestão: use a propriedade de completicidade do sistema das autofunções dum operador Hermiteano: $\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*\left(x\right)\psi_n\left(x'\right)=\delta\left(x-x'\right)$.)

3. Considere o cálculo assintótico da função de Green para equação de Klein-Gordon:

$$\left[\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\right)+m^2c^4\right]\mathcal{G}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'\right)=\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\delta\left(t-t'\right).$$

a) Para o intervalo pseudotemporal: $\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)^2-c^2\left(t-t'\right)^2<0$. Comente o uso do método do ponto de sela para integração no plano do impulso complexo.

b) Para o intervalo pseudoespacial: $\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)^2-c^2\left(t-t'\right)^2>0$. Qual é diferença na integração comparando com o caso anterior?