1 Folha 1

1. Considere um sistema de três partículas idênticas.

a) Verifique que os operadores de permutação não comutam, $P_{12}P_{13} \neq P_{13}P_{12}$, etc.

b) Apesar disso é possível encontrar funções próprias comuns a todos os P_{ij}. Verifique que as funções definidas abaixo o são efectivamente

$$\begin{aligned} \psi_S(1,2,3) &= \psi(1,2,3) + \psi(2,1,3) + \psi(1,3,2), \\ &\qquad +\psi(3,2,1) + \psi(2,3,1) + \psi(3,1,2), \\ \psi_A(1,2,3) &= \psi(1,2,3) + \psi(2,3,1) + \psi(3,1,2) \\ &\qquad -\psi(2,1,3) - \psi(1,3,2) - \psi(3,2,1). \end{aligned}$$

c) Será que b) contradiz a)? Porque?

2. Sistemas bosónicos.

(a) Determine a forma da autofunção normalizada simétrica para um sistema das três partículas sem interacção (1,2,3) nos estados ortonormalizados $(|a\rangle, |b\rangle, |g\rangle)$. A sua resposta deve incluir a própria normalização da função total.

(b) Agora, assumimos que as partículas são bosões que podem ser colocados todos no único estado $(|a\rangle = |b\rangle = |g\rangle)$. Considerando as densidades da probabilidade ántes e após de pôr $|a\rangle = |b\rangle = |g\rangle$, mostre que a probabilidade de encontrar três bosões indenticos no mesmo estado é maior que a de encontrar três partículas clássicas distingiveis no mesmo estado.

(c) Determine o factor com que a probabilidade de ocupação para bosões ultrapassa a das partículas clássicas.

3. Para $N = 3$ fermiões com spins $\frac{1}{2}$ tente escrever uma função antissimétrica $\psi_A(1,2,3)$ com

i) $\psi_A(1,2,3) = \varphi_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)\, \chi_S(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$,

ii) $\psi_A(1,2,3) = \varphi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)\, \chi_A(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$.

Verifique que não é possível escrever $\chi_A(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$, antissimétrica em relação a todas as trocas de 2 argumentos, e portanto ii) não é solução. Uma outra solução consiste em considerar somas de termos $\varphi\chi$ em que a propriedade de antissimetria de χ em relação a *um par* de partículas é compensada pela simetria de φ em relação ao *mesmo par*. Certifique-se da afirmação anterior

4. Considere no referencial centro de massa dois fermiões interactuantes com spins $\frac{1}{2}$.

(a) Qual a consequência do princípio de exclusão Pauli para a função de onda de duas partículas?

(b) Sejam $\hat{\mathbf{s}}_1$ e $\hat{\mathbf{s}}_2$ os operadores de spin dos dois neutrões. Mostre que os operadores $\hat{P}_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2/\hbar^2$ são os projectores para os estados triplet e singlet das funções de onda de spin.

(c) Usando o princípio de exclusão Pauli e as propriedades de simetria do spin e do momento angular orbital relativo L, encontre os valores permitidos de L para qualquer estado triplet ligado do sistema de duas partículas.

(d) Usando de novo o princípio de exclusão Pauli e as propriedades de simetria no espaço das coordenadas, mostre que as partículas no estado triplet nunca podem espalhar-se por $90°$ no referencial centro de massa.

5. Considere a "caixa", quer dizer, o poço bidimensional quadrado dos lados $L \times L$, onde o potential é $V = 0$, e infinito fora dele.

(a) Imagine nesta caixa uma partícula de massa M. Determine o conjunto geral das autofunções de onda $\psi(x, y)$, encontre as energias destes estados e identifique os autovalores k_x e k_y para a partícula.

(b) Escreve os três autovalores de energia mais baixos e define a suas degenerescências (se há).

(c) Faça o gráfico em função dos autovalores k_x,k_y que mostra os estados permitidos. Neste gráfico, considere o círculo de raio $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, sendo k grande. Qual a área deste círculo? Quantos estados aproximadamente encontram-se dentro dele?

(d) Agora suponha que esta mesma caixa contem $N \gg 1$ partículas de Fermi idênticas não interactuantes com massa M e spin $\frac{1}{2}$. Determine a energia do estado mais alto ocupado, se o sistema está no seu estado de base.

(e) Para o sistema de N partículas de alinha d, calcule a sua energia total.

6. Resolve a equação de Schroedinger para a partícula numa caixa cúbica de volume L^3. Assume as condições de fronteira periódicas.

(a) Mostre que no limite $L \to \infty$ o número dos estados com impulso p no intervalo $d^3p = dp_x dp_y dp_z$ é $L^3 d^3p/h^3$.

(b) Assume que os níveis mais baixos de energia na caixa estão ocupados com N electrões, tendo em conta o princípio de exclusão Pauli. Mostre que a energia por unidade de volume, u, está relacionada com o número de partículas por unidade de volume n como $u \propto n^{5/3}$.

7. Considere um par acoplado dos osciladores simples harmónicos unidimensionais distinguíveis com iguais massas e potenciais individuais $U(x_1) = Cx_1^2/2$, $U(x_2) = Cx_2^2/2$, $C > 0$ e o potencial de acoplamento

$$U_c(x_1, x_2) = k\frac{(x_1 - x_2)^2}{2}, \quad k > 0.$$

(a) Separe o Hamiltoniano do referencial centro de massa passsando às variáveis relativas $R = (x_1 + x_2)/2$ e $r = (x_1 - x_2)/2$.

(b) Mostre que a função de onda total pode ser escrita como um produto das duas funções e determine os autovalores de energia para um sistema acoplado das partículas distinguíveis.

(c) Agora assume que as partículas são indistinguíveis sendo bosões ou fermiões. Usando as propriedades de simetria das funções de produto definidas na alinha (b), determine quais níveis de energia encontrados em (b) são associados com cada tipo das partículas.

(d) Mostre que para os fermiões com os spins alinhados a probabilidade de encontrar duas partículas na mesma posição é nula. (Nota: Neste problema, podem usar o seu conhecimento das funções de onda e autovalores para um oscilador simples harmónico sem derivar a prova.)

8. O Hamiltoniano para dois fermiões com spin $\frac{1}{2}$, idênticos e acoplados, é

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x_1 - x_2\right)^2 .$$

Qual o espectro de energias e as autofunções correspondentes?

9. Dois fermiões idênticos com spin $\frac{1}{2}$ estão situados num potencial unidimensional harmónico

$$V\left(x\right) = \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

onde m é a massa do fermião e ω a sua frequência angular.

(a) Encontre as energias do estado de base e do primeiro estado excitado deste sistema de dois fermiões. Expressa os autoestados correspondentes em termos das funções de onda do oscilador harmónico e dos estados de spin.

(b) Calcule o quadrado de separação entre os fermiões,

$$\left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle$$

para o estado de energia mais baixa do sistema de dois fermiões.

(c) Repete os cálculos para o primeiro estado excitado.

10. Considere o átomo de Hélio, onde ambos electrões estão substituidos pelas partículas idênticas carregadas de spin 1. Ignorando os movimentos do núcleo, o Hamiltoniano é

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}.$$

Construi o diagrama qualitativo dos níveis de energia deste "átomo" para os casos:

quando ambas partículas estão no estado $n = 1$,

quando uma partícula está no estado $n = 1$ e outra no estado $|n, l, m\rangle = |2, 0, 0\rangle$,

Faça-lo considerando o termo e^2/r_{12} como a perturbação. Escreve as funções de onda espaciais e de spin para cada nivel em termos das funções hidrigenóides de uma partícula. Indique qualitativamente o desdobramento e degenerescência do cada nivel. Não esquece incluir o the efecto do termo e^2/r_{12}.